CAPÍTULO V

APÊNDICE I

[Recomendado para consulta; de estudo facultativo]

ENERGIA MAGNÉTICA NO CAMPO ESTACIONÁRIO

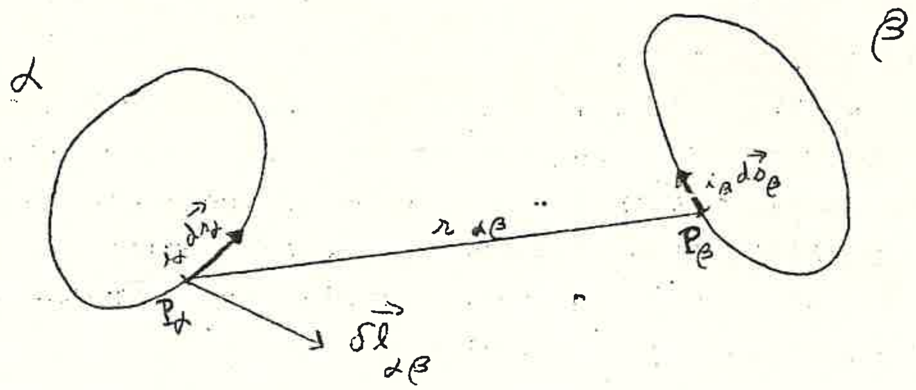
A. Trabalho das forças electrodinâmicas no deslocamento virtual de um sistema de condutôres lineares

Seja um sistema de n condutores lineares, em posições fixas e percorridos por correntes estacionárias i_α $(\alpha=1,\ldots,n)$. Imaginemos uma modificação virtual do sistema, com deslocamentos infinitesimais arbitrários dos n condutores, mas admitindo, como hipótese conceptual, que as intensidades dos n condutores permanecem constantes. Para simplificar consideremos apenas deslocamentos em que os condutores não se deformam.

Vamos calcular nestas condições o trabalho global das forças electrodinâmicas em jogo no sistema, ao longo de uma tal modificação virtual.

Começaremos por fazer notar que em qualquer deslocamento do sistema como um todo — translacção ou rotação — as forças interiores, globalmente, não realizam trabalho. Assim, já só nos ocuparemos dos deslocamentos dos condutores nos campos uns dos outros.

Tomemos dois dos condutores, α e β, e sejam $i_\alpha \vec{ds}_\alpha$ e $i_\beta \vec{ds}_\beta$ dois quaisquer elementos de corrente, respectivamente (v. figura). Designemos por $\vec{\delta l}_{\alpha\beta}$ o deslocamento infinitesimal



relativo dos elementos de corrente $i_\alpha \vec{ds}_\alpha$ e $i_\beta \vec{ds}_\beta$. Se fôr $\vec{dB}_\beta$ a indução elementar produzida em P_α pelo elemento de circuito $i_\beta \vec{ds}_\beta$, então a força elementar $d^2\vec{f}_\alpha^{(\beta)}$ com que esse campo actua sobre $i_\alpha \vec{ds}_\alpha$ é dada por

$$\overrightarrow{d^2f_\alpha^{(\beta)}} = \frac{i_\alpha}{c}\,\overrightarrow{ds_\alpha} \wedge \overrightarrow{dB_\beta}$$

e, em consequência, o trabalho virtual realizado no deslocamento infinitesimal relativo $\overrightarrow{\delta l}_{\alpha\beta}$ (pela força $\overrightarrow{d^2f_\alpha^{(\beta)}}$) pode escrever-se:

$$\frac{i_\alpha}{c}\,\overrightarrow{ds_\alpha} \wedge \overrightarrow{dB_\beta} \cdot \overrightarrow{\delta l}_{\alpha\beta} \quad .$$

A partir desta expressão passaremos, em duas etapas, ao trabalho $\delta\tau_{\alpha\beta}$ realizado no deslocamento relativo dos dois circuitos, supondo que se considera sempre fixo o circuito β. Numa primeira etapa, integramos sobre todo o circuito α, o que dá

$$\frac{i_\alpha}{c}\oint_{(\alpha)} \overrightarrow{ds_\alpha} \wedge \overrightarrow{dB_\beta} \cdot \overrightarrow{\delta l}_{\alpha\beta} = \frac{i_\alpha}{c}\,\delta\Phi_\alpha^{(\overrightarrow{dB}_\beta)}$$

(V-12")

se recorrermos à expressão ~~XXXX~~ do teorema do corte do fluxo e representarmos por $\Phi_\alpha^{(\overrightarrow{dB}_\beta)}$ o fluxo, através do circuito α, da indução produzida pelo elemento de circuito $i_\beta \overrightarrow{ds_\beta}$ ($\overrightarrow{dB}_\beta$). Em segunda etapa, somamos para todo o circuito β, vindo

$$\text{(A.1)} \qquad \delta\tau_{\alpha\beta} = \frac{i_\alpha}{c}\,\delta\Phi_\alpha^{(\beta)}$$

em que $\Phi_\alpha^{(\beta)}$ é o fluxo, através de α, da indução $\overrightarrow{B}_\beta$ produzida por todo o circuito β.

A expressão (A.1) representa pois o trabalho de deslocamento do circuito α, supondo que se fixa o circuito β; como se trata de examinar apenas o efeito do deslocamento relativo, nós podemos indiferentemente supor fixado o circuito α e procurar a expressão que um cálculo análogo daria para o trabalho de deslocamento do circuito β; é evidente que obteríamos

$$\text{(A.1')} \qquad \delta\tau_{\beta\alpha} = \frac{i_\beta}{c}\,\delta\Phi_\beta^{(\alpha)}$$

sendo agora $\Phi_\beta^{(\alpha)}$ o fluxo, através de β, da indução $\overrightarrow{B}_\alpha$ produzida por todo o circuito α. As expressões (A.1) e (A.1') traduzem porém o mesmo trabalho realizado no deslocamento relativo dos dois circuitos, que se pode em consequência escrever sob a seguinte forma simétrica:

$$(A.2) \qquad \delta \mathcal{T}_{\alpha\beta} = \delta \mathcal{T}_{\beta\alpha} = \frac{1}{2c}\left(i_\alpha \,\delta \Phi_\alpha^{(\beta)} + i_\beta \,\delta \Phi_\beta^{(\alpha)}\right) .$$

Para obter em seguida o trabalho virtual $\delta \mathcal{T}$, no deslocamento relativo dos n circuitos, temos de somar, a partir de (A.2), para todos os pares (α, β), mas com $\alpha < \beta$, para evitar repetições. Vem

$$(A.3) \qquad \delta \mathcal{T} = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha < \beta}^{\alpha,\beta} \left(i_\alpha \,\delta \Phi_\alpha^{(\beta)} + i_\beta \,\delta \Phi_\beta^{(\alpha)}\right)$$

expressão esta que é equivalente a

$$(A.3') \qquad \delta \mathcal{T} = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha \neq \beta}^{\alpha,\beta} i_\alpha \,\delta \Phi_\alpha^{(\beta)}$$

que por sua vez admite a transformação

$$(A.4) \qquad \delta \mathcal{T} = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^{n} i_\alpha \sum_{\beta \neq \alpha}^{(1 a n)} \delta \Phi_\alpha^{(\beta)} = $$
$$= \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^{n} i_\alpha \,\delta \Phi'_\alpha .$$

em que Φ'_α é o fluxo, através do condutor α, da indução produzida por todos os condutores, com excepção do próprio condutor α. Porém, se repararmos que qualquer fluxo próprio, como $\Phi_\alpha^{(\alpha)}$, não varia na modificação virtual que estamos a imaginar (conservando-se as intensidades constantes) resulta que $\delta \Phi'_\alpha = \delta \Phi_\alpha$ (sendo $\Phi_\alpha = \Phi'_\alpha + \Phi_\alpha^{(\alpha)}$ o fluxo <u>total</u> através do condutor α); e (A.4) pode portanto escrever-se

$$(A.5) \qquad \delta \mathcal{T} = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^{n} i_\alpha \,\delta \Phi_\alpha .$$

Recorrendo de novo à hipótese conceptual de se conservarem constantes as intensidades, obtém-se finalmente, a partir de (A.5) o importante resultado:

$$(A.6) \qquad \delta \mathcal{T} = \delta \left(\frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^{n} i_\alpha \,\Phi_\alpha \right) .$$

Assim,numa modificação virtual do sistema de condutores,processando-se por hipótese a intensidades constantes,o trabalho virtual global das forças electrodinâmicas em jogo iguala a variação (diferencial total) de uma função das correntes e dos fluxos, entre o 'estado' inicial e o 'estado' final do sistema. (Uma vez que estão fixadas as correntes,o 'estado' do sistema é determinado pela sua configuração geométrica,da qual dependem os fluxos).

B. Potencial electrodinâmico de um sistema de condutores lineares

O resultado precedente sugere a definição de um potencial electrodinâmico (Neumann)

$$\Psi = -\frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha \Phi_\alpha \qquad \text{(B.1)}$$

a partir do qual se podem calcular as forças generalizadas de interacção entre os circuitos do sistema,como gradiantes negativos de Ψ . (A.6) reescreve-se sob a forma

$$\delta \tau + \delta_i \Psi = 0 \qquad \text{(B.2)}$$

em que δ_i representa variação a intensidades constantes.

Poderia pensar-se que Ψ representa a energia magnética do sistema,em conformidade com o princípio de conservação da energia que (B.2) parece traduzir.Nessa ordem de ideias, deveria atribuir-se à energia magnética o carácter de uma energia potencial,à semelhança do que se passa na Electrostática.

Na realidade porém não é assim.Com efeito, Ψ não pode traduzir o trabalho total que deveria dispender-se no transporte dos diferentes circuitos a partir de posições infinitamente afastadas (situação a que seria natural fazer corresponder energia magnética nula) até às suas posições actuais no sistema.E a razão disto reside em que uma tal operação,sendo embora idealizada,deve no entanto ser viável fìsicamente.Ora,o transporte de um circuito no campo de outros circuitos é necessàriamente acompanhado de variações de fluxo (corte das linhas de força do campo) e isso provoca,como se sabe,fenómenos de indução electromagnética.As correntes induzidas que assim se geram nos diferentes circuitos fazem que o transporte não decorra naturalmente a intensidades constantes;e este facto impede que uma modificação real do sistema,por si só,se possa processar nos moldes da modificação virtual imaginada no parágrafo A. Não é lícito então utilizar (A.6) ou (B.1,2) por não se manterem constantes as intensidades das correntes,como se supôs no estabelecimento destas relações.É pois de abandonar a ideia de que Ψ representa a energia magnética de um sistema de condutores lineares.

C. Energia magnética de um sistema de condutores lineares

Podemos no entanto idealizar uma modificação real do sistema,acompanhada de um processo artificial de lhe manter as intensidades constantes.Basta para isso imaginar os circuitos ligados a fontes exteriores expressamente destinadas a compensar instantâneamente as forças electromotrizes de indução que se geram pelos deslocamentos dos condutores nos campos uns dos outros.Entram assim em jogo no balanço energético as fontes exteriores,e (B.2) não pode por isso representar,de modo nenhum, o princípio de conservação da energia.Mas,porque se reestabeleceu deste modo a condição de intensidades constantes,pode aplicar-se (A.6) para o cálculo do trabalho das forças electrodinâmicas no sistema de circuitos.

Suponhamos que a modificação do sistema assim idealizada se processa no intervalo de tempo dt e designemos por $d\Phi_\alpha$ ($\alpha = 1,\dots,n$) as variações de fluxo da indução magnética nos diferentes circuitos. Pela lei de Faraday,geram-se nos circuitos forças electromotrizes induzidas,que designaremos por $\Delta\mathcal{E}_\alpha^{ind}$ ($\alpha = 1,\dots,n$) e que valem:

$$\Delta\mathcal{E}_\alpha^{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi_\alpha}{dt} \quad . \tag{C.1}$$

Para manter as intensidades constantes,como se pretende,devem as fontes exteriores idealizadas ser capazes de criar artificialmente,a cada instante,nos respectivos circuitos,forças electromotrizes aplicadas $\Delta\mathcal{E}_\alpha^{apl}$ satisfazendo ao requisito

$$\Delta\mathcal{E}_\alpha^{apl} = -\Delta\mathcal{E}_\alpha^{ind} \tag{C.2}$$

de modo a serem instantâneamente eliminadas as correntes induzidas que surgem a cada instante. As forças electromotrizes resultantes são, com efeito, constantemente iguais às respectivas forças electromotrizes prè-existentes:

$$(C.3) \qquad \mathcal{E}_\alpha + \Delta \mathcal{E}_\alpha^{ind} + \Delta \mathcal{E}_\alpha^{apl} \equiv \mathcal{E}_\alpha$$

e, em consequência, as intensidades resultantes são iguais às intensidades prè-existentes, constantemente.

Nestas condições, o sistema recebe das fontes exteriores, no intervalo de tempo dt, a energia correspondente ao trabalho dos campos aplicados responsáveis pela referida compensação, a saber

$$(C.4) \qquad d\,\mathcal{T}^{apl} = dt \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha \Delta \mathcal{E}_\alpha^{apl}$$

que, se utilizarmos (C.1) e (C.2), se transforma em

$$(C.5) \qquad d\,\mathcal{T}^{apl} = \frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha \, d\,\Phi_\alpha \qquad ;$$

e, por se tratar de um processo efectivamente a correntes constantes, pode ter-se por fim

$$(C.6) \qquad d\,\mathcal{T}^{apl} = d_i \left(\frac{1}{c} \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha \Phi_\alpha \right) \qquad ,$$

em que d_i indica diferenciação a intensidades constantes.

Ora, a esta energia recebida pelo sistema das fontes exteriores compensadoras deve subtrair-se o trabalho entretanto realizado pelas forças electrodinâmicas, que constitui uma energia recolhida no exterior; como resultado desta subtracção obtém-se a energia efectivamente armazenada no sistema.

Deve notar-se que o trabalho dos campos aplicados responsáveis pelas forças electromotrizes prè-existentes (e que se mantêm constantes, v.(C.3)), bem como o calor de Joule libertado no sistema, são energias que podem pôr-se à margem do balanço energético, na medida em que se compensam mùtuamente. Com efeito, no regime estacionário artificialmente recriado pela imposição conseguida de permanecerem constantes as intensidades, cumpre-se como é sabido que o dispêndio de energia sob a forma de calor de Joule é exactamente coberto pelo trabalho dos campos aplicados (cf. Corrente eléctrica, Cap. III, §9E)

O trabalho realizado pelas forças electrodinâmicas no sistema vale, por (A.6) :

$$d\tau^{\text{elect.}} = d_i \left(\frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha \Phi_\alpha \right) \tag{C.7}$$

A energia armazenada no sistema no decurso da modificação real processada nas referidas condições obtém-se então subtraindo (C.7) de (C.6) :

$$dW = d\,\tau^{\text{apl}} - d\,\tau^{\text{elect.}}$$

ou seja:

$$dW = d_i \left(\frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha \Phi_\alpha \right) . \tag{C.8}$$

Mas a energia armazenada no sistema de circuitos deve interpretar-se como a variação da energia magnética do sistema ocorrida durante o referido processo. E o resultado (C.8) leva-nos então a admitir que se possa definir a energia magnética de um sistema de condutores lineares, que designaremos por W_m, pela expressão

$$W_m = \frac{1}{2c} \sum_{\alpha=1}^{m} i_\alpha \Phi_\alpha . \tag{C.9}$$

Esta expressão, tal como decorre de (C.8), só seria válida a menos de uma constante aditiva; mas é natural supor-se desde logo nula a energia magnética de um sistema na situação especial em que são nulas todas as correntes dos circuitos, não havendo portanto qualquer interacção magnética entre eles. Esta convenção elimina a constante aditiva, que já não figura em (C.9).

D. Energia magnética de uma distribuição volúmica de correntes estacionárias.

Comecemos por observar que é possível estender a definição (C.9) ,do caso de condutores lineares ao caso de condutores extensos. Um condutor extenso pode,com efeito,encarar-se como constituido por uma distribuição contínua de filamentos de corrente assimiláveis a circuitos lineares ;considerando uma secção Σ do condutor extenso normal em todos os seus pontos às linhas de corrente que por eles passam e supondo $\delta\Sigma$ um elemento de decomposição contínua da secção normal Σ ,o filamento de corrente de secção recta $\delta\Sigma$ é assimilável a um condutor linear,com intensidade de corrente $\delta i = |\vec{J}|\,\delta\Sigma$,e o conjunto de tais filamentos integra o condutor extenso. Se designarmos por $\Phi(\delta\Sigma)$ o fluxo da indução magnética total através de um diafragma apoiado no filamento cuja secção recta é $\delta\Sigma$,então (C.9) escreve-se sob a forma

$$\text{(D.1)} \qquad W_m = \frac{1}{2c} \int_{\Sigma} \Phi^{(\delta\Sigma)}\, \delta i$$

em que a integração ao longo da secção normal Σ substitui o somatório para o conjunto dos filamentos de corrente.

Se designarmos agora por $[c]_{(\delta\Sigma)}$ o circuito do filamento cuja secção recta em Σ é $\delta\Sigma$,o fluxo $\Phi^{(\delta\Sigma)}$ pode exprimir-se como é sabido por

$$\text{(D.2)} \qquad \Phi^{(\delta\Sigma)} = \oint_{[c]_{\delta\Sigma}} \vec{A} \cdot \vec{\delta s}$$

se fôr $\vec{\delta s}$ o elemento de arco ao longo de $[c]_{\delta\Sigma}$ e $\vec{A}$ o potencial-vector da indução magnética total,nesse elemento de arco. Introduzindo (D.2) em (D.1) e tendo em conta que $\delta i = |\vec{J}|\,\delta\Sigma$, vem:

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_{\Sigma} |\vec{J}|\, \delta\Sigma \oint_{[c]_{\delta\Sigma}} \vec{A} \cdot \vec{\delta s} \qquad ;$$

mas, porque $\vec{\delta s}$ tem a orientação de $\vec{J}$, pode pôr-se

$$W_m = \frac{1}{2c} \int_{\Sigma} \oint_{[c]_{\delta\Sigma}} \vec{A} \cdot \vec{J} \; \delta\Sigma \; \delta s$$

em que $\delta s = |\vec{\delta s}|$. Mas $\delta\Sigma \cdot \delta s$ é um elemento de volume do condutor e o último resultado equivale a

$$\text{(D.3)} \qquad W_m = \frac{1}{2c} \int_v \vec{A} \cdot \vec{J} \; \delta v$$

estendendo-se o integral a todo o volume do condutor. Uma tal expressão da energia magnética generaliza-se imediatamente a qualquer número de condutores extensos.

Como o potencial-vector se pode exprimir em função da densidade de corrente $\vec{J}$ mediante

$$\text{(D.4)} \qquad \vec{A}(P) = \frac{\mu_o}{4\pi c} \int_v \frac{\vec{J}(Q)}{r_{PQ}} \, dv \quad ,$$

pode dar-se a (D.3) uma outra expressão

$$\text{(D.5)} \qquad W_m = \frac{\mu_o}{8\pi c^2} \int_v \int_{v'} \frac{\vec{J}(Q) \cdot \vec{J}(Q')}{r_{QQ'}} \, \delta v \, \delta v'$$

em que a energia magnética correspondente a uma certa distribuição contínua de correntes estacionárias nos aparece em termos da distribuição $\vec{J}(Q)$ da densidade de corrente no volume <u>v</u> do condutor.

E. <u>Expressão da energia magnética na concepção de Maxwell</u>

Vamos mostrar agora que é possível exprimir a energia magnética directamente em função dos vectores do campo magnético $\vec{H}; \vec{B}$ de modo formalmente idêntico ao da expressão da energia electrostática na concepção de Maxwell que aqui se recorda:

$$(E.1) \qquad W_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv$$

em que Ω é o volume de todo o espaço.

Recorremos para isso à expressão (D.3) da energia magnética. Em primeiro lugar, deve notar-se que o domínio de integração em (D.3) pode indiferentemente incluir ou não o volume exterior aos condutores porque aí é $\vec{J} = 0$; isso permite-nos supor já que o domínio de integração é o volume de todo o espaço, Ω. Fazemos em seguida intervir a equação de Ampère do regime estacionário sob a sua forma diferencial, rot $\vec{H} = \frac{1}{c} \vec{J}$, vindo

$$W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H} \, dv .$$

Agora, a identidade diferencial

$$\text{div } (\vec{A} \wedge \vec{H}) = \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{H}$$

permite escrever

$$W_m = \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \vec{H} \cdot \text{rot}\vec{A} \, dv - \int_{\Omega} \text{div}(\vec{A} \wedge \vec{H}) \, dv \right]$$

mas o segundo integral trata-se pelo teorema do fluxo-divergência transformando-se em

$$\int_{S_\infty} \vec{A} \wedge \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS = \lim_{R \to \infty} \int_{S(R)} \vec{A} \wedge \vec{H} \cdot \vec{n} \, dS$$

e revela-se nulo porque $\vec{A}$ tende para zero com $1/R$ e $\vec{H}$ tende para zero com $1/R^2$ enquanto dS cresce com R^2. Resta o 1º integral; e com $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, vem:

$$(E.2) \qquad W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv$$

sendo Ω o volume de todo o espaço.

Assim, na concepção de Maxwell, em todo o ponto onde se encontra definido o campo magnético pelo par de vectores $\vec{H};\vec{B}$, se pode falar de uma densidade volúmica de energia magnética, dada por

$$w_m = \frac{1}{2}\,\vec{H}\cdot\vec{B} \qquad \text{(E.3)}$$

F. Energia magnética e coeficientes de indução

Notemos, em primeiro lugar, que, se combinarmos (C.9) com as expressões dos fluxos Φ_α como composições lineares das intensidades

$$\frac{1}{c}\,\Phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} L_{\alpha\beta}\, i_\beta \qquad (\alpha=1,\ldots,n)$$

(cf. Campo magnético das correntes, Cap. IV - 1ª Parte, (IV-46)), resulta:

$$W_m = \frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}^{1\,a\,n} L_{\alpha\beta}\, i_\alpha\, i_\beta \qquad \text{(F.1)}$$

Assim, a energia magnética de um sistema de condutores lineares exprime-se como uma função quadrática homogénea das intensidades das correntes, na qual intervêm como coeficientes constantes precisamente os coeficientes de indução, $L_{\alpha\beta}$. Visto que as correntes representam movimentos macroscópicos de cargas, achando-se as intensidades ligadas directamente às velocidades dessas cargas ($\vec{J} = \rho_m\vec{v}$), a expressão (F.1) de W_m aproxima a energia magnética de uma energia cinética na Mecânica, a qual é função quadrática das velocidades das partículas, com coeficientes de massa, como se sabe.

No caso particular de um condutor linear único, (F.1) escreve-se simplesmente

$$W_m = \frac{1}{2}\, L\, i^2 \qquad \text{(F.2)}$$

sendo L o coeficiente de self-indução desse condutor, que se define como a constante de proporcionalidade entre a intensidade $\underline{i}$ do circuito e o fluxo Φ que o atravessa (multiplicado por 1/c):

$$(F.3) \qquad \frac{1}{c}\,\Phi = L\,i \quad .$$

Passando agora ao caso de um condutor extenso, porque não pode definir-se o fluxo Φ (a não ser como uma média), não pode também definir-se o coeficiente de self-indução através de uma expressão do tipo (F.3). Todavia, se se verifica, como acontece em certos exemplos, que a densidade de corrente $\vec{J}(Q)$ revela ser proporcional à intensidade global da corrente no condutor, $\underline{i}$, então a fórmula (D.5) permite afirmar que a energia magnética é proporcional ao quadrado de $\underline{i}$, como em (F.2). Este facto leva-nos a definir o coeficiente de indução do condutor extenso mediante a expressão (imagem de (F.2))

$$(F.4) \qquad L = \frac{2W_m}{i^2} = \frac{1}{ci^2}\int_v \vec{A}\cdot\vec{J}\,dv \quad ,$$

utilizando (D.3); ou

$$(F.5) \qquad L = \frac{2W_m}{i^2} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2 i^2}\int_v\int_{v'} \frac{\vec{J}(Q)\cdot\vec{J}(Q')}{r_{QQ'}}\,dv\,dv'$$

utilizando (D.5).

CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

APÊNDICE II — INTEGRAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MAXWELL

§ 1. PRIMEIRA ETAPA DE INTEGRAÇÃO

A primeira etapa de integração consiste em encontrar funções potenciais das quais possamos derivar os campos. Este procedimento é-nos sugerido pela existência de um potencial-escalar e de um potencial- vector nos campos estáticos e estacionários a partir dos quais se calculam os vectores $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

Partimos das equações de Maxwell, na sua forma mais geral

$$\left\{\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\,(\vec{E}-\vec{E}^a) = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{div}\vec{B} = 0 \\ \operatorname{rot}\,\vec{H} = \dfrac{1}{c}\left(\vec{J}+\dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right) & \operatorname{div}\vec{D} = \rho \end{array}\right. \tag{1}$$

que fazemos como sempre acompanhar das equações materiais de ligação dos campos às induções:

$$D = \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P} \qquad\qquad \vec{B} = \mu_0\,(\vec{H}+\vec{M}) \tag{2}$$

Considerando a equação $\operatorname{div}\vec{B} = 0$, podemos imediatamente admitir que $\vec{B}$ deve ser o rotacional de um campo vectorial, $\vec{A}\,(x,y,z,t)$, a determinar:

$$\vec{B} = \operatorname{rot}\,\vec{A} \tag{3}$$

Introduzindo então (3) na 1ª eq. de (1) e tendo em conta que os operadores rot e $\partial/\partial t$ comutam entre si, vem:

$$\operatorname{rot}\,\left(\vec{E}-\vec{E}^a+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = 0 \quad ;$$

e esta equação impõe que o vector operando do (operador) rot se identifique com o gradiante de um escalar, $-V(x,y,z,t)$, a determinar:

$$\vec{E}-\vec{E}^a+\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} V \quad ;$$

ou seja:

$$\vec{E} = \vec{E}^a - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} V \tag{4}$$

$\vec{A}$ e V são os potenciais electromagnéticos — os potenciais de que derivam os vectores $\vec{E}$ e $\vec{B}$ do campo electromagnético pelas equações (4) e (3).

$\vec{A}$ [illegible] potencial-vector; V(x,y,z,t) diz-se potencial-escalar

Os potenciais electromagnéticos não são únicos; na realidade há uma infinidade de pares de potenciais ($\vec{A}$; V) capazes de fornecer os vectores do campo. Mostra-se fàcilmente, por substituição em (3) - (4), que, se o par de potenciais ($\vec{A}$;V) constitui uma solução, então também é solução qualquer par ($\vec{A}^{\dagger}$; $V^{\dagger}$) definido por:

$$\begin{cases} \vec{A}^{\dagger} = \vec{A} - \text{grad } \Phi \\ V^{\dagger} = V + \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \end{cases} \qquad (5)$$

em que $\Phi(x,y,z,t)$ é uma função escalar arbitrária do espaço e do tempo.

As relações (5) chamam-se <u>relações de invariância electromagnética</u>, porque ao transformarmos os potenciais de ($\vec{A}$; V) para ($\vec{A}^{\dagger}$; $V^{\dagger}$) segundo (5) , os campos ficam invariantes.

Note-se desde já que, do campo vectorial $\vec{A}(x,y,z,t)$, só está fixado o seu rotacional que deve igualar $\vec{B}$, por (3); entretanto a sua divergência fica ainda inteiramente livre. (Recorde-se o teorema de Helmholtz.).

§ 2. SEGUNDA ETAPE DE INTEGRAÇÃO

A segunda etape de integração consiste em encontrar os potenciais $\vec{A}$ e V que satisfaçam, mediante (3) e (4), às equações de Maxwell. Visto que, por (3) e (4), os potenciais $\vec{A}$ e V satisfazem já por hipótese às equações (1) da 1ª linha, basta agora utilizar as equações (1) da 2ª linha, acompanhadas das equações de ligação (2). Combinando umas e outras, obtem-se justamente

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} - \dfrac{\varepsilon_0 \mu_0}{c} \dfrac{\partial}{\partial t} (\vec{E} - \vec{E}^a) = \dfrac{\mu_0}{c} \left(\vec{J} + c \text{ rot } \vec{M} + \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}^a}{\partial t} \right) \\ \text{div } (\vec{E} - \vec{E}^a) = \dfrac{1}{\varepsilon_0} (\rho - \text{div } \vec{P} - \varepsilon_0 \text{ div } \vec{E}^a) \end{cases} \qquad (6)$$

com certos artifícios de cálculo evidentes. Pondo

$$\begin{cases} \vec{J}^{*} = \vec{J} + c \text{ rot } \vec{M} + \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t} + \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}^a}{\partial t} \\ \rho^{*} = \rho - \text{div } \vec{P} - \varepsilon_0 \text{ div } \vec{E}^a \end{cases} \qquad (7)$$

o sistema (6) escreve-se:

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} - \dfrac{\varepsilon_0 \mu_0}{c} \dfrac{\partial}{\partial t} (\vec{E} - \vec{E}^a) = \dfrac{\mu_0}{c} \vec{J}^{*} \\ \text{div } (\vec{E} - \vec{E}^a) = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho^{*} \end{cases} \qquad (6')$$

Introduzindo em (6') as expressões (3) e (4) — ditas "relações de Maxwell" — obtém-se, depois de alguma manipulação, o seguinte sistema de equações diferenciais de 2ª ordem em $\vec{A}$ e V

$$(8) \quad \begin{cases} \operatorname{lap} V + \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\vec{A}) = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho^* \\ \operatorname{lap}\vec{A} - \dfrac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\vec{A} + \dfrac{\varepsilon_0\mu_0}{c}\dfrac{\partial V}{\partial t}\right) = -\dfrac{\mu_0}{c}\vec{J}^* \end{cases}$$

A integração deste sistema de equações diferenciais permitirá levar a cabo o problema de achar os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ que satisfazem as equações de Maxwell em dada situação electromagnética.

É esta evidentemente a altura de aproveitar o grau de liberdade que consiste em fixar o valor de $\operatorname{div}\vec{A}$ que, com efeito, é completamente arbitrário — a fim de simplificar o sistema (8) e na medida do possível encontrar soluções.

Uma das mais correntes escolhas do valor de $\operatorname{div}\vec{A}$ é a que se traduz pela chamada <u>condição de Lorentz</u>

$$(9) \qquad \operatorname{div}\vec{A} + \frac{\varepsilon_0\mu_0}{c}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

conduzindo aos <u>potenciais electromagnéticos de Lorentz</u>, de que nos vamos ocupar especialmente, pelo seu grande interesse.

§ 3. POTENCIAIS RETARDADOS DE LORENTZ

Mediante a adopção da <u>condição de Lorentz</u>, (9), o sistema (8) transforma-se em

$$(10) \quad \begin{cases} \operatorname{lap} V - \dfrac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2}\dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho^* \\ \operatorname{lap}\vec{A} - \dfrac{\varepsilon_0\mu_0}{c^2}\dfrac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\dfrac{\mu_0}{c}\vec{J}^* \end{cases}$$

São de realçar duas características evidentes no sistema (10), as quais conferem uma especial importância ao acêrto da escolha (9) : (1ª) - Temos equações <u>separadas</u>, uma em V, outra em $\vec{A}$, ou melhor: uma em V, e uma em cada uma das componentes cartesianas, A_x, A_y, A_z, de $\vec{A}$. (2ª) - Essas quatro equações são todas formalmente idênticas. Está portanto muito facilitada a integração do sistema (10). Ele pode resumir-se, escrevendo:

$$(10') \qquad \Box_0 \left\{ \begin{matrix} V \\ \vec{A} \end{matrix} \right\} = - \left\{ \begin{matrix} 1/\varepsilon_0 \, \rho^* \\ \mu_0/c \, \vec{J}^* \end{matrix} \right\}$$

em que $\Box_0$ representa o operador de d'Alembert ou <u>d'Alembertiano</u>, referido ao vácuo:

$$(11) \qquad \Box_0 \equiv \text{lap} - \frac{\varepsilon_0 \mu_0}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \equiv \text{lap} - \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

sendo $a_0 = c/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas no vácuo.

Pode mostrar-se que o sistema (10) admite como solução as funções

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} V(P,t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_v \frac{\rho^*(Q, t - \frac{r_{PQ}}{a_0})}{r_{PQ}} \, dv \\ \vec{A}(P,t) &= \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \frac{\vec{J}^*(Q, t - \frac{r_{PQ}}{a_0})}{r_{PQ}} \, dv \end{aligned} \right.$$

que constituem os <u>potenciais retardados de Lorentz</u>. Vê-se, com efeito, que, para o cálculo dos potenciais $\vec{A}$ e V num ponto $\underline{P}$ e no instante $\underline{t}$, os elementos potenciantes $\rho^* dv$ e $\vec{J}^* dv$ localizados no ponto Q, à distância r_{PQ}, contribuem (segundo uma lei de potenciação, simples em $1/r$) <u>com os seus valores no próprio instante</u> $\underline{t}$, <u>mas sim</u> <u>com os seus valores no instante anterior</u> $\bar{t} = t - r_{PQ}/a_0$; quer dizer contribuem <u>não instantâneamente</u> <u>mas sim retardadamente</u> e, de um modo preciso, <u>com um atraso</u> $\underline{r_{PQ}/a_0}$.

Tudo se passa como se as acções electromagnéticas, que são produzidas no ponto P pelas cargas e correntes (totais) localizadas em Q, demorassem o tempo r_{PQ}/a_0 a transmitir-se desde Q (ponto potenciante) até P (ponto potenciado), i.e., o tempo necessário para ser percorrida a distância que separa P de Q, r_{PQ}, em movimento rectilíneo e uniforme, com a velocidade a_0.

Existe assim uma forte sugestão para que seja atribuído a estes potenciais um significado físico conforme à ideia de propagação das acções a distância, não-instantânea mas sim com uma velocidade finita, precisamente a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas no vácuo.

Não devemos no entanto esquecer que os potenciais electromagnéticos, no quadro da teoria de Maxwell, não são grandezas físicas, mas apenas instrumentos matemáticos úteis no cálculo dos campos; e há, como vimos, a possibilidade de escolhê-los de entre muitas soluções todas igualmente aceitáveis (dando o mesmo campo electromagnético), sem a necessidade de impôr a essa escolha qualquer critério físico.

Notemos que, sob a mesma condição de Lorentz, (9), se pode obter uma outra solução, os <u>potenciais avançados</u>, mudando em (12) $\underline{a_0}$ para $\underline{-a_0}$ (as equações (10) não dependem senão de a_0^2). Na mesma perspectiva de uma conformidade à ideia de propagação não-instantânea das acções a distância, estes potenciais violariam o princípio da causalidade (com um efeito anterior à causa), o que temos por fisicamente inaceitável — embora tais potenciais não deixem de fornecer o campo correcto.

CAPÍTULO V , APÊNDICE III

TEOREMA DE HELMHOLTZ SOBRE A DECOMPOSIÇÃO DE UM CAMPO VECTORIAL

1. Recordemos que se diz solenoidal um campo cuja divergência é nula por toda a parte; e que se diz irrotacional um campo cujo rotacional é nulo por toda a parte. Um campo vectorial mais geral não será nem solenoidal nem irrotacional, i.e., terá divergência não-nula ao menos em algumas regiões do espaço e terá rotacional não-nulo em algumas (outras ou não) regiões do espaço. Mostra-se porém que o campo vectorial mais geral pode sempre considerar-se como a soma de um campo solenoidal com um campo irrotacional (*). Nesta afirmação consiste essencialmente o teorema de Helmoltz sobre a decomposição de um campo vectorial. Alternativamente, podemos dizer que o mesmo teorema afirma que todo o campo vectorial é completamente caracterizado pela sua divergência e pelo seu rotacional, desde que conhecidos em todos os pontos do espaço (a divergência e o rotacional de um campo dizem-se por isso as fontes do campo). Neste Apêndice examinaremos primeiro como se caracteriza um campo irrotacional, depois, um campo solenoidal; em seguida ocupar-nos-emos do enunciado

---

(*) Esta afirmação é, de facto, válida sob certas condições matemáticas, que são muito pouco restritivas no domínio das aplicações à representação (vectorial) de grandezas físicas.

e do conteúdo do teorema de Helmholtz.

2. CAMPO IRROTACIONAL

Consideremos um campo irrotacional $\vec{E}$ e suponhamos conhecida em toda a parte a sua divergência (em geral $\neq 0$):

(AIII.1) $$\text{rot}\,\vec{E} = 0 \quad ; \quad \text{div}\,\vec{E} = \rho$$

O escalar função de ponto ρ diz-se a fonte do campo. Por ser $\text{rot}\,\vec{E} = 0$, o campo $\vec{E}$ deriva de um potencial escalar pela operação gradiente e escreve-se:

(AIII.2) $$\vec{E} = -\,\text{grad}\,\phi$$

(O sinal – aqui é puramente convencional). Então, de $\text{div}\,\vec{E} = \rho$ resulta:

(AIII.4) $$\text{lap}\,\phi = -\rho$$

Esta é a equação de Poisson do campo irrotacional em causa. Suposto ρ conhecido, o potencial escalar ϕ conhece-se mediante a resolução desta equação diferencial. Prova-se que tem como solução (particular) a seguinte função

(AIII.5) $$\phi(P) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{\rho(Q)}{r_{PQ}}\, dv$$

sendo Ω (em geral) o volume estendido a todo o espaço. Por (AIII.1) ou (AIII.2), cumpre-se que

(AIII.6) $$\oint_{[c]} \vec{E} \cdot \vec{ds} = 0 ,$$

qualquer que seja o percurso fechado [c]. Como uma consequência desta propriedade (AIII.6) e por argumentos físicos já discutidos (na Electrostática, por exemplo), um

campo irrotacional diz-se um <u>campo conservativo</u>.
[Note-se que (AIII.6), (AIII.2) e a 1ª eq. (AIII.1) são expressões, absolutamente equivalentes entre si, do carácter irrotacional do campo.].

3. <u>CAMPO SOLENOIDAL</u>

Consideremos um <u>campo solenoidal</u> $\vec{B}$ e suponhamos conhecido em toda a parte o seu rotacional (em geral $\neq 0$):

(AIII.7) $$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad ; \quad \operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J}$$

O campo vectorial função de ponto $\vec{J}$ diz-se a <u>fonte do campo</u> (trata-se agora de uma <u>fonte de vórtice</u>, tendo em vista o significado físico do operador rotacional). Por ser $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, pode mostrar-se(*) que $\vec{B}$ deriva de um potencial-vector pela operação rotacional e escreve-se:

(AIII.8) $$\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$$

Este potencial-vector $\vec{A}$, definido a menos do gradiante de um escalar, pode sempre fixar-se sob a condição de ter divergência nula (ficando então bem definido):

(AIII.9) $$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

Então, a partir de $\operatorname{rot} \vec{B} = \vec{J}$ (AIII.7), vem:

(AIII.10) $$\operatorname{lap} \vec{A} = -\vec{J}$$

(Para a obtenção deste resultado utiliza-se a conhecida identidade diferencial $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = -\operatorname{lap}\vec{A} + \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A}$.).
Tendo em conta que $\operatorname{lap}\vec{A} = \sum_{\alpha}^{x,y,z} (\operatorname{lap} A_\alpha)\, \vec{e}_\alpha$,

(*) Com base nos teoremas do fluxo-divergência e de Stokes.

a eq. (AIII.10) desdobra-se em 3 eq.s cartesianas, formalmente idênticas, entre si, e à eq. (AIII.4):

(AIII.11) $$\text{lap}\, A_\alpha = - J_\alpha \qquad (\alpha = x, y, z)$$

A eq. (AIII.10), <u>sob a condição (AIII.9)</u>, é a <u>equação de Poisson</u> do campo solenoidal em causa. Suposto $\vec{J}$ conhecido, o potencial-vector $\vec{A}$ conhece-se mediante a resolução das equações diferenciais (AIII.11). Prova-se que se obtém como solução (particular) a seguinte função

(AIII.12) $$\vec{A}(P) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{\vec{J}(Q)}{r_{PQ}}\, dv$$

sendo Ω (em geral) o volume estendido a todo o espaço.
Pela 1ª equação (AIII.7), cumpre-se que

(AIII.13) $$\oiint_S \vec{B} \cdot \vec{n}\; dS = 0$$

para qualquer superfície fechada S (regular). Como uma consequência desta propriedade e com um sentido físico já discutido (em variadas situações) um campo solenoidal diz-se um <u>campo de fluxo conservativo</u>: sempre no sentido das linhas de força, o fluxo de $\vec{B}$ através de uma secção de corte de um tubo de linhas de força tem sempre o mesmo valor ao longo do dito tubo (por outras palavras, o fluxo <u>conserva-se</u> ao longo do tubo).
[Note-se que (AIII.13), (AIII.8) e a 1ª eq. (AIII.7) são expressões, absolutamente equivalentes entre si, do carácter solenoidal do campo.].

4. TEOREMA DE HELMHOLTZ

Seja um campo vectorial geral $\vec{G}$ — i.e., uma grandeza vectorial função de ponto. Consideremos um volume $\underline{\varpi}$ limitado por uma superfície (fechada) $\underline{\Sigma}$, regular por hipótese; seja essa a nossa região de observação. Designemos por Q o ponto corrente pelo volume $\underline{\varpi}$ e por R o ponto corrente sobre a superfície $\underline{\Sigma}$; seja $\vec{n}_R$ o versor da semi-normal, exterior, à superfície $\underline{\Sigma}$ no ponto R.

Suponhamos que em todo o ponto Q, interior a $\underline{\varpi}$, são conhecidos os valores da divergência de $\vec{G}$ e do rotational de $\vec{G}$, i.e., $\mathrm{div}_Q \vec{G}$ e $\mathrm{rot}_Q \vec{G}$. Suponhamos, além disso, que em todo o ponto R, sobre $\underline{\Sigma}$ são conhecidas as componentes normal e tangencial de $\vec{G}$, representadas, respectivamente, pelo escalar $\vec{G}\cdot\vec{n}_R$ e pelo vector $\vec{G}\wedge\vec{n}_R$. Nestas condições, nós podemos construir para todo o ponto N, as funções $\emptyset(N)$ e $\vec{A}(N)$, escalar e vectorial, respectivamente, que se exprimem matemàticamente por:

$$\text{(AIII.14)} \qquad \emptyset(N) = \int_{\varpi} \frac{\mathrm{div}_Q \vec{G}}{4\pi\, r_{QN}}\, dv - \int_{\Sigma} \frac{\vec{G}\cdot\vec{n}_R}{4\pi\, r_{RN}}\, dS$$

$$\text{(AIII.15)} \qquad \vec{A}(N) = \int_{\varpi} \frac{\mathrm{rot}_Q \vec{G}}{4\pi\, r_{QN}}\, dv + \int_{\Sigma} \frac{\vec{G}\wedge\vec{n}_R}{4\pi\, r_{RN}}\, dS$$

(sendo $\underline{dv}$ o elemento de volume circunvizinho de Q, que representa a decomposição do volume $\underline{\varpi}$ que se utiliza na integração em $\underline{\varpi}$; e sendo $\underline{dS}$ o elemento de superfície circumvizinha de R, que representa a decomposição da superfície $\underline{\Sigma}$ que se utiliza na integração em $\underline{\Sigma}$.)

Posto isto, <u>demonstra-se que</u>(*) o valor do campo $\vec{G}$ num ponto P (genérico), interior de $\underline{\varpi}$ (ou a $\underline{\Sigma}$) pode encontrar-se mediante a expressão:

$$\text{(A III.16)} \qquad \vec{G}(P) = -\operatorname{grad}_P \phi + \operatorname{rot}_P \vec{A} \, .$$

A identidade que resulta de compôr as três expressões (A III.14), (A III.15) e (A III.16) — i.e., a substituição das expressões de ϕ e de $\vec{A}$ em (A III.16) — constitui a <u>tradução matemática sintética do teorema de Helmholtz</u>. A expressão (A III.16) põe em flagrante evidência que o campo vectorial mais geral $\vec{G}(P)$ se pode considerar como a soma de um campo solenoidal, $\operatorname{rot}_P \vec{A}$, com um campo irrotacional, $-\operatorname{grad}_P \phi$ — como anunciámos no parágrafo 1.. Ou seja:

$$\text{(A III.17)} \qquad \vec{G}(P) = \vec{E}(P) + \vec{B}(P)$$

com:

$$\text{(A III.18)} \qquad \vec{E}(P) = -\operatorname{grad}_P \phi \quad \text{e} \quad \vec{B}(P) = \operatorname{rot}_P \vec{A} \, .$$

As considerações feitas nos parágrafos 2. e 3. levam-nos a tomar

$$\text{(A III.19)} \qquad \rho(Q) = \operatorname{div}_Q \vec{G} \quad \text{e} \quad \vec{J}(Q) = \operatorname{rot}_Q \vec{G}$$

como <u>fontes do campo $\vec{G}$ distribuidas pelo volume ϖ</u> (<u>fontes volúmicas</u>), na medida em que são fontes dos campos 'componentes' $\vec{E}$ e $\vec{B}$, respectivamente. Mas as mesmas considerações sugerem ainda, por analogia, que

(*) Para a demonstração, ver Referências bibliográficas (no final).

tomemos as quantidades

$$\sigma(R) = -\vec{G}\cdot\vec{n}_R \quad e \quad \vec{j}(R) = \vec{G}\wedge\vec{n}_R \tag{AIII.20}$$

como fontes do campo $\vec{G}$ distribuidas sobre a superfície Σ que delimita ϖ (fontes superficiais). As funções $\phi(N)$ e $\vec{A}(N)$ escrevem-se então :

$$\phi(N) = \frac{1}{4\pi}\int_{\varpi}\frac{\rho(Q)}{r_{QN}}\,dv + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\sigma(R)}{r_{RN}}\,dS \tag{AIII.21}$$

$$\vec{A}(N) = \frac{1}{4\pi}\int_{\varpi}\frac{\vec{J}(Q)}{r_{QN}}\,dv + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma}\frac{\vec{j}(R)}{r_{RN}}\,dS \tag{AIII.22}$$

Ainda por analogia com as considerações dos §§ 2. e 3., $\phi(N)$ e $\vec{A}(N)$ dizem-se, respectivamente, potencial-escalar e potencial-vector do campo geral $\vec{G}(P)$. As últimas expressões dizem-nos como se calculam os potenciais $\phi(N)$ e $\vec{A}(N)$ no ponto potenciado N, a partir das distribuições (volúmica e superficial) das fontes pelos pontos potenciantes Q e R, respectivamente, no volume ϖ e sobre a superfície Σ. (Tendo em vista o significado físico do operador rotacional, e por extensão, as fontes $\vec{J}(Q)$ e $\vec{j}(R)$ designam-se especificamente por fontes de vórtice).

5. SIGNIFICADO DAS FONTES SUPERFICIAIS

Para pôr em evidência o significado das fontes superficiais (AIII.20), vamos admitir que o campo $\vec{G}$, como acontece em situações físicas muito frequentes, satisfaz à seguinte regularidade no infinito :

Sendo $\underline{d}$ a distância do ponto de observação P (fixo) ao ponto corrente R, se se supõe que R se desloca para infinito e portanto $d \to \infty$, então $\vec{G}(R)$ tende para zero, com $1/d^2$, i.e.:

$$\lim_{d \to \infty} \left[d^2 \, \vec{G}(R) \right] \text{ é finito .} \qquad \text{(AIII.23)}$$

Por outras palavras, $|\vec{G}(R)|$ e $1/d^2$ são infinitamente pequenos da mesma ordem, quando $d \to \infty$.

Suponhamos agora que a nossa região de observação se alarga a todo o espaço, aumentando ϖ indefinidamente (tendendo para o volume $\underline{\Omega}$ de todo o espaço), ao mesmo tempo que a superfície $\underline{\Sigma}$ devém a superfície infinita (ou superfície do infinito), $\underline{\Sigma_\infty}$ que engloba todo o espaço (que envolve $\underline{\Omega}$). Nestas condições, $d \to \infty$; e, se se cumpre a <u>regularidade no infinito</u> que se exprime por (AIII.23), então é fácil mostrar que os integrais de superfície que se contêm em (AIII.14) e (AIII.15), ou em (AIII.21) e (AIII.22), tendem para zero (quando $d \to \infty$).

Assim, (AIII.21) e (AIII.22) escrever-se-ão:

$$\varnothing(N) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{\rho(Q)}{r_{QN}} \, dv \qquad \text{(AIII.24)}$$

$$\vec{A}(N) = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \frac{\vec{J}(Q)}{r_{QN}} \, dv \qquad \text{(AIII.25)}$$

(com expressões formalmente idênticas a (AIII.5) e a (AIII.12), respectivamente). Note-se que nas expressões (AIII.24) e (AIII.25), $\rho(Q)$ e $\vec{J}(Q)$ continuam a representar as fontes volúmicas do campo, dadas por (A III.19), só que, agora, Q é o ponto (genérico) corrente por todo o espaço (pelo volume $\underline{\Omega}$).

Ora as expressões (A III.24) e (A.III.25) podem decompôr-se, por decomposição do domínio de integração em $\underline{\varpi}$ e $\underline{\Omega - \varpi}$, dando:

(A III.26) $$\phi(N) = \frac{1}{4\pi}\int_{\varpi} \frac{\rho(Q')}{r_{Q'N}}\,dv' + \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega-\varpi} \frac{\rho(Q'')}{r_{Q''N}}\,dv''$$

(A III.27) $$\vec{A}(N) = \frac{1}{4\pi}\int_{\varpi} \frac{\vec{J}(Q')}{r_{Q'N}}\,dv' + \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega-\varpi} \frac{\vec{J}(Q'')}{r_{Q''N}}\,dv'',$$

sendo agora $\underline{dv'}$ o elemento de volume circunvizinho de Q' (ponto genérico interior de $\underline{\varpi}$), representando a decomposição do volume $\underline{\varpi}$ que se utiliza na integração em $\underline{\varpi}$; e sendo $\underline{dv''}$ o elemento de volume circunvizinho de Q'' (ponto genérico interior de $\underline{\Omega - \varpi}$, i.e., <u>exterior a ϖ</u>), representando a decomposição do volume $\underline{\Omega - \varpi}$ que se utiliza na integração em $\underline{\Omega - \varpi}$. Assim as 1.as parcelas de (A III.26) e de (A III.27) representam as contribuições das fontes volúmicas interiores a $\underline{\Sigma}$ e as 2.as parcelas representam as contribuições volúmicas exteriores a $\underline{\Sigma}$, visto ser $\underline{\Sigma}$ a superfície que separa os volumes $\underline{\varpi}$ e $\underline{\Omega - \varpi}$. (Note-se que sendo estas distintas parcelas, distintas contribuições para os potenciais $\phi(N)$ e $\vec{A}(N)$ — são-no igualmente para o cálculo de $\vec{G}(P)$ mediante (A III.16)).

Comparemos agora as expressões (A III.26) e (A III.27), respectivamente, com (A III.21) e (A III.22); a comparação revela-nos muito claramente que os integrais de volume sobre $\underline{\Omega - \varpi}$ igualam (respectivamente) os integrais de superfície sobre $\underline{\Sigma}$. Daqui resulta que as fontes superficiais sobre Σ contribuem para (o cálculo de) $\vec{G}(P)$ exactamente com o mesmo efeito global com que o fariam as fontes volúmicas exteriores à superfície Σ; por outras palavras, as fontes superficiais sobre Σ substituem, no cálculo de $\vec{G}(P)$, as fontes volúmicas exteriores a $\underline{\Sigma}$.

Em conclusão, o cálculo de $\vec{G}(P)$ pode fazer-se à custa das fontes volúmicas interiores a uma superfície (fechada) Σ — fontes essas que são $\mathrm{div}_Q \vec{G}$ e $\mathrm{rot}_Q \vec{G}$, com as actuações que lhes são próprias — mais as fontes superficiais definidas sobre a mesma superfície Σ — fontes essas que são $-\vec{G}.\vec{n}_R$ e $\vec{G} \wedge \vec{n}_R$, com as actuações que lhes são próprias. Além disso, também se conclui, pelo presente parágrafo, que as fontes superficiais sobre Σ representam a acção global das fontes volúmicas exteriores a Σ.

6. COMENTÁRIOS FINAIS

Em resumo, um campo vectorial geral $\vec{G}(P)$ pode sempre decompôr-se na soma de um campo irrotacional com um campo solenoidal. Isto confere a estes dois tipos de campos — essencialmente distintos — uma importância capital; as propriedades que os caracterizam (e os distinguem, de modo flagrante) foram apontadas e discutidas nos §§ 2. e 3..

Por outro lado, as expressões dos potenciais $\phi(N)$ e $\vec{A}(N)$, que permitem aceder ao cálculo de $\vec{G}(P)$ mediante (A III.16), vêm pôr em foco o papel desempenhado neste teorema de Helmholtz pelas propriedades diferenciais de $\vec{G}$ que se traduzem por $\mathrm{div}_Q \vec{G}$ e $\mathrm{rot}_Q \vec{G}$ — as fontes volúmicas do campo. Esse mesmo papel adquire particular realce quando se verifica que o conhecimento dos valores de $\mathrm{div}_Q \vec{G}$ e $\mathrm{rot}_Q \vec{G}$ em todos os pontos do espaço permite, <u>por si só</u>, determinar $\vec{G}(P)$ (num ponto genérico P), mediante (A III. 24), (A III. 25) e (A III. 16). Como foi anunciado no § 1., resulta efectivamente do teorema de Helmholtz que <u>todo o campo vectorial é completamente caracterizado pela sua divergência e pelo seu rotacional</u>, <u>desde que conhecidos em todos os pontos do espaço.</u>

[Deve notar-se que as duas distintas fontes volúmicas de um campo geral $\vec{G}(P)$ se encontram numa estreita correspondência com as duas distintas 'componentes' do campo na decomposição (A III, 16) [ou seja, (A III. 17) e/(A III. 18)]. Tem-se, com efeito:

$$(\mathrm{A\,III}.28) \quad \begin{cases} \mathrm{div}_Q \vec{G} = \mathrm{div}_Q \vec{E} & (\text{porque } \mathrm{div}\, \vec{B} \equiv 0) \\ \mathrm{rot}_Q \vec{G} = \mathrm{rot}_Q \vec{B} & (\text{porque } \mathrm{rot}\, \vec{E} \equiv 0) \end{cases}$$

Assim, a fonte de divergência de um campo geral $\vec{G}(P)$ coincide com a (única) fonte da sua 'componente' irrotacional $\vec{E}(P)$; e a fonte de rotacional de $\vec{G}(P)$ coincide com a (única) fonte (fonte de vórtice) da sua 'componente' solenoidal $\vec{B}(P)$.]

Uma capital importância assumem assim também as referidas propriedades diferenciais de $\vec{G}(P)$, as quais, convém sublinhar, <u>estão intimamente relacionadas com as propriedades geométricas locais das linhas de força do campo</u>

Estes comentários (conclusões e reflexões) devem ter-se presentes para o bom entendimento do <u>sistema das equações de Maxwell</u> — as quais descrevem as relações físicas, representando leis da Natureza, a que devem satisfazer a divergência e o rotacional dos campos eléctrico e magnético, em ordem à interpretação de todos os fenómenos electromagnéticos (à escala macroscópica).

<u>De um modo sumário</u>, digamos que:

(1) Os precedentes comentários tornam com efeito claro que o sistema das equações de Maxwell, mediante a aplicação do teorema de Helmholtz, propicia em princípio (i.e., ao menos teòricamente) o acesso ao conhecimento dos campos eléctrico e magnético (por "construção" a partir das suas propriedades diferenciais, <u>div</u> e <u>rot</u>).

(2) Fica também patente que o sistema das equações de Maxwell consubstancia uma formulação matemática <u>completa</u> da <u>Teoria do Campo de Faraday</u>. Na verdade, segundo esta Teoria, a interpretação dos fenómenos electromagnéticos deveria basear-se essencialmente na análise do comportamento local das linhas de força dos campos eléctrico e magnético, por toda a parte onde se manifestassem as acções de cargas eléctricas, de correntes, de ímans, designadamente nos meios materiais (ou no vácuo) que se interpõem entre os corpos detentores de tais cargas, correntes e ímans. Ora, como é sublinhado na página precedente, as propriedades $\mathrm{div}_Q \vec{G}$ e $\mathrm{rot}_Q \vec{G}$ estão intimamente relacionadas com as propriedades geométricas locais das linhas de força do campo; e por (1), tais propriedades completam-se mùtuamente na "construção" do campo.

Capítulo V, Apêndice III

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

A. R. PLONSEY and R. COLLIN
Principles and Applications of Electromagnetic Fields
Sec. 1–18
(McGraw-Hill, London, 1961)

B. E. BAUER
Champs de vecteurs et de Tenseurs
Chap III – §§ 1-3-6-10
(Masson & Cie, Paris, 1955)

C. A. DA SILVEIRA
Teoria da Electricidade, 2ª Parte.
Cap. III – § 40, Págs 137–141
(Editado em Lisboa, 1948)