

# CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

## 1ª PARTE — INDUÇÃO ELECTROMAGNÉTICA

### V. 1. 1 — Introdução

A experiência mostra que as variações, no tempo do fluxo da indução magnética, através de um circuito condutor fechado, são acompanhadas de fenómenos de indução electromagnética que se manifestam no circuito pelo aparecimento de correntes induzidas. As variações no tempo do fluxo magnético do campo, no qual o circuito está imerso, podem surgir em resultado: quer de deslocamentos de luas relativamente ao circuito; quer de deslocamentos mútuos do circuito e circuitos vizinhos; quer ainda de simples variações das intensidades dos circuitos vizinhos ou do próprio circuito, encontrando-se todos os corpos em repouso. (\*)

As experiências sobre os fenómenos de indução electromagnética permitem concluir que: (i) fixadas as características do circuito, a indução electromagnética, que nele se gera, é essencialmente determinada em todas as circunstâncias pela taxa de variações do fluxo de indução através do circuito por unidade de tempo; (ii) mantendo

---

(\*) 1. A corrente induzida num circuito pelo simples facto de que varia no tempo a corrente que o percorre, e, por consequência, o campo magnético que ele próprio produz, designa-se por corrente de self-indução. São exemplos de correntes de self-indução as extra-correntes de estabelecimento e de ruptura que surgem quando num circuito se insere ou se retira uma f.e.m. estacionária.

2. As correntes induzidas geradas na massa de um condutor extenso que se movimenta ao seio de um campo magnético designam-se especialmente por correntes de Foucault.

invariáveis os restantes parâmetros físicos, a intensidade da corrente induzida num circuito varia quando varia a resistência do circuito — e as medições revelam que a corrente induzida observada corresponde a uma força-electromotriz de indução ou f.e.m. induzida a qual se encontra, quantitativamente, em relação directa com a taxa de variação do fluxo por unidade de tempo; (iii) o sentido da corrente induzida num circuito acha-se ligado de uma maneira perfeitamente definida ao sinal da variação do fluxo através do circuito; (iv) se o circuito se encontra previamente percorrido por uma corrente estacionária quando nele se produz um fenómeno de indução electromagnética, a experiência revela também que as intensidades das duas correntes, a pré-existente e a induzida, se somam algebricamente.

Estas conclusões encontram-se convenientemente explicitadas e quantitativamente concretizadas nas leis experimentais que regem o fenómeno da indução electromagnética (\*) — ou nas reformulações subsequentes, como vamos ver nos §§ seguintes.

### V. 1. 2 — Leis da indução electromagnética

A lei de Faraday da indução electromagnética enuncia-se nestes termos: Sempre que o fluxo da indução magnética  $\vec{B}$  através de um circuito varia no decurso do tempo, gera-se no circuito uma força-electromotriz de indução,  $\mathcal{E}^{ind}$ , que é directamente proporcional à taxa de decréscimo desse fluxo,  $\Phi$ , no tempo (decréscimo de  $\Phi$  por unidade de tempo):

$$(V.-1) \quad \mathcal{E}^{ind} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt}$$

(\*) enunciadas pela primeira vez por Faraday sob forma qualitativa precisadas e completadas depois por Lenz.

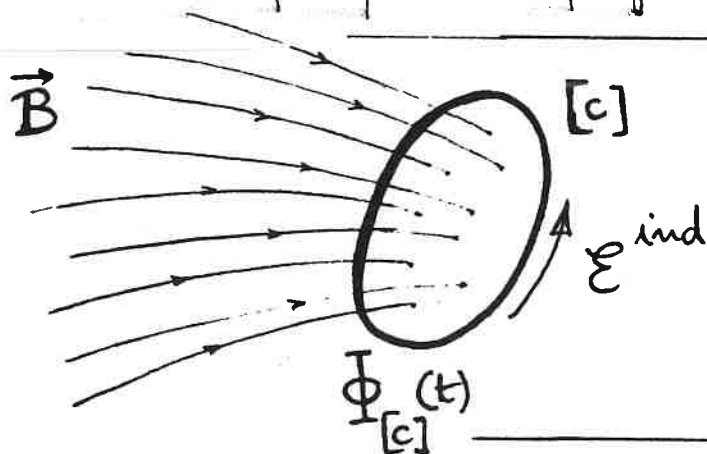
com uma constante de proporcionalidade dada por  $1/c$  em que  $c$  é a constante electromagnética universal, que já nos surgiu na lei de Laplace (Cf. § IV.1.2). Deve salientar-se que a lei de Faraday é uma lei experimental que se cumpre, sempre sob a mesma forma (V-1) quaisquer que sejam as circunstâncias determinantes da variação do fluxo de  $\vec{B}$  através do circuito (nomeadamente, deslocamentos relativos de circuitos ou de circuitos e ímans e/ou variações das intensidades dos circuitos).

Note-se que na expressão (V-1) da lei de Faraday se supõe existir, entre o sentido positivo do fluxo  $\Phi$  através do circuito e o sentido positivo da circulação no circuito, a interligação regida pela regra de Stokes (do saca-rolhas). É sob estas condições que a experiência conduz à "taxa de decréscimo do fluxo", i.e., ao sinal (-) no 2.º membro de (V-1). Assim, o sentido da f.e.m. induzida, ou o sentido da corrente induzida correspondente, fica perfeitamente determinado pelo sinal da variação do fluxo. E, quando se combina este aspecto da lei de Faraday com o efeito magnético de uma corrente, regido pela equação de Ampère, ou pelo teorema de Ampère (Cf. § IV.3.3), resulta que o sentido da corrente induzida (ou o sentido em que a f.e.m. induzida tende a produzir corrente) obedece à lei de Lenz que se enuncia nestes termos: A corrente induzida tem um sentido tal que o campo magnético que ela própria produz se opõe à variação de fluxo que lhe deu origem. Adiante se discutirá como a lei de Lenz pode ver-se como efeito, como decorrente do jogo de duas das equações de Maxwell, Princípios fundamentais do Electromagnetismo. Esta observação justifica que demos, daqui por diante, neste sub-capítulo, prioridade ao tratamento da lei de Faraday.

Observemos agora que a lei de Faraday se exprime sempre (em todas as circunstâncias, como ensina a experiência) à custa do fluxo descrito meramente como fluxo através do circuito, portanto sem qualquer referência à superfície ao longo da qual deve ser calculado. Mas isto quer dizer que a lei de Faraday atesta implicitamente o facto de o fluxo  $\Phi_{[c]}$  poder ser calculado mediante

$$(V-2) \quad \Phi_{[c]} = \int_{S[c]} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS$$

sendo  $S[c]$  qualquer diáfana apoiada sobre  $[c]$  (V. Figura)



Circuito  $[c]$  imerso num campo magnético de fluxo variável no tempo  $\Phi_{[c]}(t)$

$$\left( \varepsilon^{\text{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} \right)$$

Ora esta possibilidade só existe para os campos solenoidais. Isto significa que na lei de Faraday (nesta lei experimental) está implícita a afirmação de que o campo  $\vec{B}$  — podendo aqui ser um campo essencialmente variável no tempo — é solenoidal, cumprindo

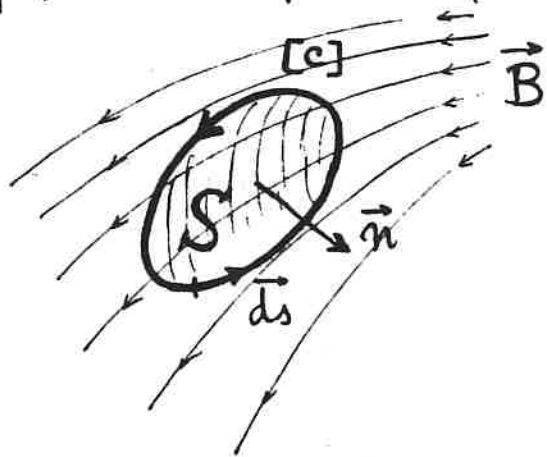
$$(V-3) \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

Portanto, a propriedade  $\text{div } \vec{B} = 0$ , que a indução magnética respeitava nos domínios do campo magnético da corrente e do campo magnético dos ímãs, continua a ser uma propriedade fundamental da indução magnética em geral no domínio do campo electromagnético variável — e isso é puro e simplesmente acarretado pela lei de Faraday, como acabámos de ver.

### V. 1.3. — Campos eléctricos induzidos

Apresentemos agora o tratamento generalizado da lei de Faraday, introduzido por Maxwell.

Consideremos uma curva fechada  $[c]$  imersa num campo magnético e seja  $S[c]$  um diafragma qualquer apoiado sobre  $[c]$ ; suponhamos respeitada a regra de Stokes entre os sentidos positivos do fluxo através de  $S[c]$  e da circulação ao longo de  $[c]$ . Pela lei de Faraday, sempre que um circuito condutor fechado coincida com esta curva  $[c]$  e se verifique uma variação de fluxo de indução magnética através de  $[c]$ , gera-se no circuito uma f.e.m. induzida detectável pela corrente induzida correspondente, e que satisfaz (V-1). Mas isso significa que se



pode conceber a existência de um campo eléctrico responsável pela corrente induzida — o campo eléctrico que solicita as cargas móveis ao seu movimento ao longo do circuito. Este campo eléctrico designa-se naturalmente por campo

eléctrico induzido,  $\vec{E}^{ind}$ , e a sua circulação ao longo de  $[c]$  deve igualar a f.e.m. induzida:

$$(V-4) \quad \mathcal{E}^{ind} = \oint_{[c]} \vec{E}^{ind} \cdot d\vec{s}$$

Ora, a generalização de Maxwell consiste em pensar-se que, mesmo não havendo nenhum condutor coincidente com a curva fechada  $[c]$ , se gera sempre um campo eléctrico induzido  $\vec{E}^{ind}$ , a que corresponde a f.e.m. dada pela circulação (V-4) e satisfazendo (V-1), desde que se verifica uma variação de fluxo através de  $[c]$ . Este campo eléctrico induzido, agora não

detectável mediante uma corrente induzida, e no entanto, o mesmo que solitaria as cargas móveis se acaso um condutor viesse coincidir com a curva fechada  $[c]$ . Como  $[c]$  é qualquer, uma tal generalização estende-se a todo o espaço e pode resumir-se neste outro enunciado da lei da indução electromagnética de Faraday: Toda a variação no tempo do fluxo de  $\vec{B}$  (indução magnética), em quaisquer circunstâncias, gera no espaço um campo eléctrico induzido,  $\vec{E}^{ind}$ , tal que a circulação de  $\vec{E}^{ind}$  ao longo de  $[c]$  (no sentido positivo) é proporcional à taxa de decréscimo no tempo do fluxo de  $\vec{B}$  através de qualquer diáfana  $S_{[c]}$  apoiada sobre  $[c]$  (no sentido positivo):

$$(V-5) \quad \oint_{[c]} \vec{E}^{ind} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{S_{[c]}} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Reportando-nos aos factos experimentais aludidos na conclusão (iv) do § V.1.1, vejamos que a soma algébrica das correntes, induzida e estacionária, num circuito condutor, vai implicar a soma algébrica das f.e.m.'s correspondentes e, por aí, implica a soma vectorial dos respectivos campos eléctricos, a saber, campo eléctrico induzido,  $\vec{E}^{ind}$ , e campo eléctrico da corrente estacionária,  $\vec{E}^e + \vec{E}^a$ , sendo  $\vec{E}^e = -\text{grad}V$  um campo de carácter electrostático e  $\vec{E}^a$  o campo aplicado. (cf. § III.9). Então para o campo total,  $\vec{E}$ , tem-se:

$$(V-6) \quad \vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^a + \vec{E}^{ind} \quad (*)$$

E esta expressão é susceptível da mesma generalização a todo o espaço em que se produz um fenómeno de indução electromagnética, gerador de  $\vec{E}^{ind}$ , havendo na mesma região campos eléctricos pré-existentes  $\vec{E}^e$  ou  $\vec{E}^a$ .

(\*) Note-se que, por (V-4),  $\vec{E}^{ind}$ , ele próprio, só é definido a menos de um grad  $\alpha$

### V.1.4. Expressão local da lei de Faraday, no caso dos corpos em repouso

Comecemos por calcular a taxa de variação do fluxo de  $\vec{B}$ , no caso dos corpos em repouso. Tem-se

$$(V-7) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$$

Com efeito, os símbolos operacionais  $\frac{d}{dt}$  e  $\int_S \dots \vec{n} dS$  são permutáveis visto que  $[C]$  e  $S$  não variam no tempo (corpos em repouso). Então, utilizando (V-5), vem

$$\oint_{[C]} \vec{E}^{ind} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad ;$$

e transformando o 1.º integral pelo teorema de Stokes (como mesmo qualquer diafragma  $S'$  apoiado sobre  $[C]$  e respeitando sempre a interligação de sentidos de fluxo e de circulação governada pela regra de Stokes) resulta:

$$\int_S \text{rot} \vec{E}^{ind} \cdot \vec{n} dS = -\frac{1}{c} \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS$$

Ora, visto que esta igualdade se deve verificar para todo e qualquer diafragma  $S'$  apoiado sobre  $[C]$  e sobre toda e qualquer curva  $[C]$ , segue-se que

$$(V-8) \quad \boxed{\text{rot} \vec{E}^{ind} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

Esta é a expressão local da lei de Faraday, no caso dos corpos em repouso. Ela traduz, explicitamente, que em toda a região do espaço em que há um campo magnético  $\vec{B}$  variável no tempo, aí se gera, pelo fenómeno da indução electromagnética, um campo eléctrico induzido cujo rotacional iguala em cada ponto  $1/c$  vezes a derivada parcial negativa em ordem ao tempo de  $\vec{B}(t)$  no mesmo ponto (taxa de diminuição de  $\vec{B}$  por unidade de tempo). Pode dar-se imediatamente uma versão

da propriedade local (V-8) exprimindo-a em função do campo total  $\vec{E}$  dado por (V-6). Resulta:

$$(V-9) \quad \boxed{\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

pois  $\vec{E}^e$  é um campo de carácter electrostático ( $\text{rot} \vec{E}^e = 0$ ). A equação (V-9) é de importância capital; ela foi incorporada por Maxwell no sistema das equações fundamentais do Electromagnetismo, para corpos em repouso. Por conter a lei de Faraday sob forma local para os corpos em repouso, já no âmbito da generalização que lhe foi imprimida por Maxwell, esta equação recebe a designação de equação de Maxwell-Faraday.

Repare-se que esta equação encerra um conteúdo mais vasto: quando se supõe  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$  (campo estacionário) cai-se em  $\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$  que traduz uma importante propriedade do campo de corrente estacionária; quando além disso se faz  $\vec{E}^a = 0$ , cai-se em  $\text{rot} \vec{E} = 0$  que representa uma das propriedades fundamentais do campo electrostático. Adiante retomaremos esta discussão.

### V.1.5. — Taxa de variação do fluxo no caso dos corpos em movimento

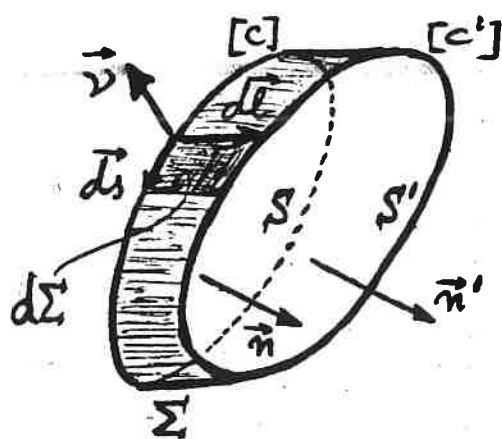
Antes de passar à expressão local da lei de Faraday no caso dos corpos em movimento, detêmo-nos no cálculo prévio da taxa de variação do fluxo que se apresenta neste caso bastante mais complicado.

No caso dos corpos em movimento, para calcular  $\frac{d\Phi}{dt}$ , é evidentemente a lei de variação, no tempo, do próprio  $\Phi$  (globalmente) que interessa considerar. Podemos no entanto começar por supor  $\vec{B}$  invariável no tempo e utilizar o teorema do corte do fluxo para um circuito que se desloca nesse campo.



### V.1.5. A — Teorema do corte do fluxo

Consideremos um circuito  $[c]$  inserido num campo de indução  $\vec{B}$  (invariável no tempo); tomemos um diafragma  $q.q.$   $S$  apoiado em  $[c]$  e seja  $\Phi$  o fluxo de  $\vec{B}$  através de  $S$  no sentido relacionado pela regra de Stokes com um sentido pré-fixado como positivo para a circulação ao longo de  $[c]$  (tomando portanto no cálculo do fluxo  $\Phi$  as semi-normais  $\vec{n}$  indicadas na Figura, quando o sentido de circulação em  $[c]$  é o do elemento de arco genérico  $\vec{ds}$ ). Suponhamos que  $[c]$  executa um deslocamento



elementar acompanhado ou não de uma deformação, assumindo cada elemento  $\vec{ds}$  de  $[c]$  um deslocamento por si próprio,  $\vec{dl}$ . (v. Figura) Designemos por  $[c']$  o circuito deslocado, tomemos um qualquer diafragma  $S'$  apoiado sobre  $[c']$  e seja  $\Phi'$  o fluxo de  $\vec{B}$  através de  $S'$

com idêntica convenção de sentidos.

Procuremos relacionar a variação  $\Phi' - \Phi$ , ocorrida neste deslocamento elementar, com o conjunto dos  $\vec{dl}$  que o caracterizam. Isso tem interesse não só no tratamento das leis da indução electromagnética, mas também em vários outros problemas. Consideremos, para isso, a superfície  $\Sigma$  descrita por  $[c]$  no deslocamento elementar executado (v. Figura). Tome-mos a superfície fechada  $S \cup S' \cup \Sigma$  e seja  $\vec{v}$  a semi-normal exterior ao elemento genérico  $d\Sigma$  (v. Figura). Reparemos que se tem

$$(V-10) \quad \vec{v} d\Sigma = \vec{ds} \wedge \vec{dl}$$

Ora, por ser  $\vec{B}$  um campo solenoidal ( $\text{div} \vec{B} = 0$ ) e pelo teorema do fluxo-divergência podemos escrever:

$$\int_{S'} \vec{B} \cdot \vec{n}' dS' - \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS + \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{\nu} d\Sigma = 0$$

tendo em conta os sentidos das semi-normais. Resulta pois:

$$(V-11) \quad \Phi' - \Phi = - \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \vec{\nu} d\Sigma \quad ;$$

i.e. : a variação do fluxo através de [c], quando [c] executa um deslocamento elementar, iguala o fluxo que entra pela superfície  $\Sigma$  descrita por [c] no seu deslocamento.

O circuito [c], no seu deslocamento, corta as linhas de força do campo  $\vec{B}$ , corta um fluxo, justamente o fluxo através de  $\Sigma$ . Daí, dizer-se: « a variação do fluxo através de [c] iguala o fluxo cortado por [c] no seu deslocamento. » e daí designar-se a conclusão (V-11) por teorema do corte do fluxo. Interessa desde já extrair as diferentes formas que pode assumir (V-11) quando se utiliza a relação (V-10)

$$(V-12) \quad \Phi' - \Phi = - \oint_{[c]} \vec{B} \cdot \vec{\tau} s \wedge \vec{d}\ell$$

ou:

$$(V-12') \quad \Phi' - \Phi = \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{d}\ell \cdot \vec{\tau} s$$

ou ainda:

$$(V-12'') \quad \Phi' - \Phi = \oint_{[c]} \vec{\tau} s \wedge \vec{B} \cdot \vec{d}\ell$$

### V.1.5.B — Taxa de variação do fluxo para um circuito que se desloca num campo

Comecemos por supor  $\vec{B}$  invariável no tempo e utilizemos o teorema do corte do fluxo para o deslocamento do circuito [c] no intervalo de tempo  $dt$ . Recorrendo precisamente a (V-12') e notando que cada  $d\ell$  está associado a uma velocidade

$\vec{v}$ , sendo genericamente  $d\vec{l} = \vec{v} dt$ , com o mesmo  $dt$  para qualquer ponto de  $[c]$ , resulta:

$$d\Phi = dt \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{s} ;$$

donde se tem:

$$(V-13) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{s} .$$

Para tratar o caso dos corpos em movimento com toda a generalidade, deve sempre considerar-se  $\vec{B}$  variável no tempo. Pode mostrar-se<sup>(\*)</sup>, atendendo ao carácter solenoidal de  $\vec{B}(t)$ , por (V-3), que a taxa de variação  $d\Phi/dt$  é então calculável simplesmente pela adição dos 2<sup>os</sup> membros de (V-7) e (V-13), vindo:

$$(V-14) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS + \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

### V.1.6 — Expressão local da lei de Faraday, no caso dos corpos em movimento

Admitindo, para simplificar,  $\vec{B}$  invariável no tempo e combinando (V-13) com (V-5), vem:

$$\oint_{[c]} \vec{E}^{ind} \cdot d\vec{s} = -\frac{1}{c} \oint_{[c]} \vec{B} \wedge \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

visto que esta igualdade se deve verificar para qualquer curva  $[c]$ , resulta:

$$(V-15) \quad \vec{E}^{ind} = \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B}$$

que é a expressão local procurada, da lei de Faraday, no caso dos corpos em movimento. Facilmente se reconhece na equação

(\*) Cf., por ex., Panofsky and Phillips, Classical Electricity and Magnetism, 2<sup>nd</sup> ed., 1972, pag 160 e seq.<sup>5</sup>.

(V-15) a lei de Laplace (Cf. § IV.1.2).

Consideremos, com efeito, um circuito móvel num campo de indução  $\vec{B}$  como exemplo típico de situação regida pela eq. (V-15); seja  $\vec{v}$  a velocidade de um dado ponto do circuito,  $Q$ . Ora, o campo induzido  $\vec{E}_{ind}$ , em  $Q$ , não é senão a força que solicita a unidade de carga (positiva) a mover-se no circuito (ao longo do circuito), contribuindo assim para uma corrente de indução. Mas essa força iguala justamente  $\frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B}$ , como deve acontecer pela lei de Laplace, porque essa carga ( $q=1$ ) se está a mover com o circuito, com uma velocidade  $\vec{v}$ , no campo de indução  $\vec{B}$ .

Deve pois concluir-se que é a lei de Laplace que interpreta afinal esta faceta (ou modalidade) da lei da indução electromagnética de Faraday; ou, se quisermos: que a lei de Laplace não é senão um aspecto — o primeiro a ser conhecido — de uma lei experimental mais ampla, a lei da indução electromagnética. Em qualquer caso, esta observação vem tornar perfeitamente compreensível que a constante de proporcionalidade que surge na lei experimental da indução electromagnética não se tenha revelado como uma nova constante física mas precisamente como o factor  $\frac{1}{c}$  da lei de Laplace.

3

5/2/90

V.2.1 - Recapitulação dos resultados estabelecidos

V.2.1.A. Como já temos referido, as primeiras hipóteses que são feitas na Teoria de Maxwell do Electromagnetismo consistem em admitir que as equações

$$(I) \quad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

$$(II) \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

estabelecidas para os campos estáticos e da corrente estacionária, subsistem ainda formalmente no quadro do campo electromagnético variável.

No tocante à equação (I), começa por ser na Electrostatica uma consequência da lei de Coulomb e acaba por traduzir o teorema de Gauss sob a forma generalizada que vai abarcar o comportamento dos dieléctricos na presença de um campo eléctrico; o recurso ao campo  $\vec{D}$  nesta equação escamoteia as cargas de polarização. Admitir a eq. (I) no campo da corrente estacionária, depois no campo variável, significa admitir que essas mesmas propriedades se generalizam formalmente a todo o Electromagnetismo. Tal equação afirma, como um principio, que a  $\operatorname{div} \vec{D}$  fornece em todas as circunstâncias a densidade volumica de carga eléctrica verdadeira, total.

Quanto à equação (II), ela generaliza a todo o Electromagnetismo uma propriedade fundamental do campo magnético da corrente estacionária e do campo magnético dos átomos, subjacente à própria lei de Faraday da indução electromagnética: o fluxo da indução é, em todas as circunstâncias, conservativo,  $\vec{B}$  tem, em todas as circunstâncias, carácter solenoidal. Tal equação traduz, em particular,

a não existência de cargas magnéticas verdadeiras como um dos princípios de interpretação de todos os fenômenos electromagnéticos (Cf. § IV.7.5).

V.2.1.B. Adopta-se em seguida, como um dos pilares mais importantes da estrutura técnica do Electromagnetismo, a equação de Maxwell-Faraday — expressa local da lei de Faraday da indução electromagnética sob a forma (V-9) que transcreveremos:

$$(III) \quad \text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Repare-se que esta equação encerra no seu conteúdo algumas das propriedades que fomos registando ao longo do estudo dos vários domínios do Electromagnetismo. Ela não traduz somente a lei da indução electromagnética para os corpos em repouso — no tratamento generalizado que dela deu Maxwell.

Se supusermos que o campo é estacionário, tem-se  $\partial \vec{B} / \partial t = 0$  e a equação (III) particulariza-se em  $\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$ , uma das equações que regem o campo eléctrico da corrente estacionária, traduzindo aí o princípio de conservação da energia. Se supusermos que  $\vec{E}^a = 0$ , a eq. (III) particulariza-se, mais ainda, em  $\text{rot} \vec{E} = 0$ , que pode representar o campo eléctrico da corrente estacionária em meios homogêneos, ou, recordando um pouco, que traduz uma das propriedades fundamentais do campo electrostático.

Este processo de particularização, aparentemente simples, desenvolveu-se na verdade ao invés, como um processo de generalização, cujos passos fundamentais procuramos referir no nosso estudo. Nós passámos de  $\text{rot} \vec{E} = 0$

a  $\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$  e desta equação à eq. (III), na medida em que era necessário abandonar, num novo domínio de conhecimentos experimentais, a ideia interpretativa válida no domínio precedente, em favor de uma ideia essencialmente nova. Com efeito, é primeiro o princípio de conservação da energia electrostática (traduzido por  $\text{rot} \vec{E} = 0$ ) que não subsiste no domínio da corrente estacionária e tem de generalizar-se, com modificações essenciais (portanto com  $\text{rot} \vec{E} \neq 0$ ), para envolver também o calor de Joule libertado pela corrente. É depois a f.e.m. dos campos aplicados que deixa de ser a única responsável pela corrente num circuito (como é traduzido por  $\text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$  em corrente estacionária), para dar lugar à indução electromagnética que leva ao estabelecimento da eq. (III).

Assim, enquanto as equações (I) e (II) puderam ser mantidas formalmente por não haver nenhum facto experimental a exigir modificações relevantes — pelo contrário, a equação (III) aparece-nos como a expressão final de um processo de generalizações sucessivas, com uma modificação essencial em cada etapa, de equações que se revelavam como não podendo subsistir de um dado domínio de conhecimentos para outros mais vastos, a ser regido por novas leis.

V.2.1. C. A teoria de Maxwell do Electromagnetismo vai ainda apoiar-se nas sugestões experimentais contidas na equação de Ampère dos campos magnéticos estacionários (Cf. § IV.8) que transcrevemos:

$$(V.2-1) \quad \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \vec{J}$$

Recordemos que esta equação sintetiza propriedades de que goza, de um lado, o campo magnético da corrente estacionária e, de outro lado, o campo magnético dos ímãs. Ela reflecte as leis de Biot-Savart ~~(e de Laplace)~~ e traduz uma propriedade fundamental da magnetostática dos corpos magnetizados. Na sua incidência mais geral e mais significativa, a ela deve satisfazer, em todas as circunstâncias estacionárias, o campo magnético  $\vec{H}$  de correntes e ímãs.

No campo electromagnético variável, porém, é óbvio que a equação de Ampère não pode subsistir. Com efeito, por ser  $\text{div rot} \equiv 0$  (como se sabe), resulta que a equação (V.2-1) é incompatível com a equação de conservação da carga eléctrica que recordamos

$$(V.2-2) \quad \text{div } \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Como a seu tempo vimos, esta equação traduz uma propriedade essencial da corrente em regime variável ( $\frac{\partial \rho}{\partial t} \neq 0$ ). Digamos mesmo que esta equação traduz um princípio (o de conservação da carga eléctrica) que se revelou, experimentalmente, como devendo presidir a toda a interpretação dos fenómenos electromagnéticos. Este princípio deve ser englobado nos princípios fundamentais do Electromagnetismo, esta equação tem de ser incorporada no esquema de Maxwell.

V.2.1.D. Isto significa que a equação de Ampère deve ser essencialmente modificada para o regime variável: ela não representa senão um estágio de um processo de generalização que ainda não atingiu o seu termo.



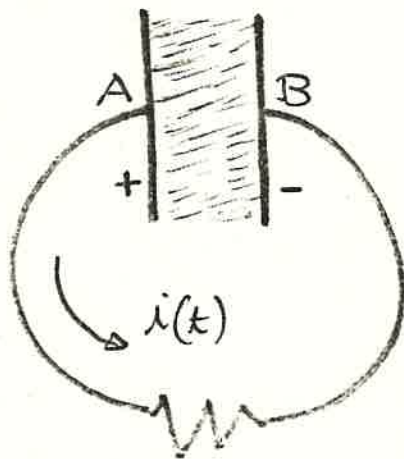
A questão que se põe é naturalmente a de descobrir a modificação essencial que deve operar-se na eq. (V.2-1) para fazer surgir uma nova equação capaz de contribuir para o sistema de princípios que deve reger o campo electromagnético variável — e, ao mesmo tempo, susceptível de se reduzir à eq. (V.2-1) para o regime estacionário.

Para este problema crucial, que os físicos enfrentavam ao tempo de Maxwell, nenhum facto experimental conhecido trazia, no entanto, um princípio de solução ou qualquer sugestão fecunda. Coube a Maxwell resolvê-lo, elaborando uma hipótese verdadeiramente genial, de ordem puramente técnica — e que só veio a ter confirmação experimental à roda de vinte anos mais tarde.

### V.2.2. — Corrente de deslocamento

V.2.2.A. Maxwell começou por introduzir um novo conceito, o de corrente de deslocamento. Examinemos como surge este conceito no caso simples da descarga de um condensador a que se curto-circuitam as armaduras por um fio exterior (v. figura). O fio é percorrido por uma corrente variável (que cessa praticamente ao fim de um intervalo de tempo mais ou menos curto).

Esta corrente, entre A e B, pelo fio, é uma corrente de condução, fluxo organizado de cargas eléctricas, de densidade  $\vec{j}$  e satisfaz a eq. de conservação de carga eléctrica (V.2-2).



Quer dizer que, ao contrário do que acontece no campo estacionário, aqui, as linhas de força de  $\vec{J}(Q)$  não se fecham sobre si próprias ( $\text{div } \vec{J} \neq 0$ ): a corrente  $i(t)$  é na realidade aberta — ela interrompe-se entre as armaduras do condensador.

Maxwell tem então a ideia de procurar uma nova corrente, definida pelo menos entre as armaduras, capaz de completar a corrente de condução, fechando as linhas de força. Recorre, para isso, à própria eq. de conservação de carga (V.2-2), que é assim o ponto de partida, tomada já como equação a manter inquestionavelmente. Substitui nesta equação a grandeza  $\rho$  pelo seu valor  $\text{div } \vec{D}$  à face da eq. (I), que já tinha sido assumida como princípio fundamental em todo o Electromagnetismo. Resulta daí:

$$\text{div } \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\text{div } \vec{D}) = 0 \quad ;$$

e, porque os operadores  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\underline{\text{div}}$  comutam:

$$(V.2-3) \quad \text{div} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) = 0$$

Isto é o mesmo que pôr em evidência um novo vector (com carácter de densidade de corrente),  $\vec{C}$ , com divergência essencialmente nula:

$$(V.2-4) \quad \vec{C} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad ; \quad \text{div } \vec{C} = 0$$

Maxwell encontra assim uma nova densidade de corrente,  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ , que somada a  $\vec{J}$  dá uma densidade de corrente total  $\vec{C}$ , cujas linhas de

de força se fecham sobre si próprias. A nova densidade de corrente,  $\partial \vec{D} / \partial t$ , designa-se por corrente de deslocamento (é a taxa de variações no tempo do deslocamento eléctrico  $\vec{D}$ ). A corrente assim idealizada é uma pura construção teórica; de natureza física distinta da de uma corrente de condução, não representa de modo nenhum qualquer movimento de cargas à escala macroscópica. Tem entretanto existência entre as armaduras do condensador e realiza aí um prolongamento da corrente de condução — compreendendo-se assim que a corrente total  $\vec{C} = \vec{J} + \partial \vec{D} / \partial t$  feche as suas linhas de força, em harmonia com o seu carácter solenoidal.

V.2.2.B. Os dois termos doravante considerados na corrente total  $\vec{C}$  são, na maioria das aplicações, de ordem de grandeza muito diferente. Num isolante perfeito não existe senão corrente de deslocamento; num condutor perfeito só existe corrente de condução. Mas nos corpos reais há as duas correntes e a diferença de ordens de grandeza entre elas depende <sup>mutuamente</sup> das características do meio material <sup>nas frequências</sup> e das frequências do campo instalado. Admitindo tratar-se de um meio sem histerese, linear, isotrópico e homogéneo (supondo válidas as relações  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  e  $\vec{J} = \sigma^* \vec{E}$ , com  $\epsilon$  e  $\sigma^*$  escalares constantes) e considerando instalado um campo harmónico de frequência  $\omega$ , pode ver-se sem dificuldade que o quociente das ordens de grandeza vale

$$(V.2-5) \quad \left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right| / |\vec{J}| \sim \omega \theta$$

sendo  $\theta$  o tempo de relaxação do meio material ( $\theta = \epsilon / \sigma^*$ ). A relação (V.2-5) permite concluir que só com frequências

excessivamente elevadas as duas correntes ficariam de ordens de grandeza comparáveis num condutor; de qualquer modo, só para frequências muito elevadas a corrente de deslocamento pode atingir, mesmo num isolante, valores comparáveis aos valores típicos de uma corrente de condução num condutor.

Isto explica que, ao tempo de Maxwell, não fosse viável detectar experimentalmente os possíveis efeitos da corrente de deslocamento nos fenómenos electromagnéticos, por não serem acessíveis frequências suficientemente elevadas.

### V. 2.3 — A hipótese de Maxwell. Equações de Maxwell - Ampère

Não sendo embora a corrente de deslocamento um fluxo organizado de cargas eléctricas, Maxwell conjectura que este conceito poderá desempenhar um papel preponderante na interpretação dos fenómenos electromagnéticos. Considerando a corrente total  $\vec{C}$  como a grandeza que generaliza para o regime variável o carácter solenoidal que  $\vec{J}$  possuía no regime estacionário, admite que  $\vec{C}$ , reduzindo-se a  $\vec{J}$  no regime estacionário ( $\partial \vec{D} / \partial t = 0$ ) deve, em geral, desempenhar no regime variável o papel que  $\vec{J}$  desempenhava no regime estacionário.

É com esta ideia que retoma o problema da equação de Ampère: admite que aí também a corrente  $\vec{J}$  deve ser substituída pela corrente total  $\vec{C}$  que generaliza  $\vec{J}$ , para passar de uma equação válida no regime estacionário à sua modificação adequada ao regime variável.

Maxwell concebe portanto, como um princípio físico, ainda que sem qualquer base experimental,

que a corrente de deslocamento,  $\partial \vec{D} / \partial t$ , produz os mesmos efeitos magnéticos que a corrente de condução,  $\vec{J}$ . (\*) Foi esta a chamada hipótese de Maxwell.

Em conformidade com um tal princípio, a equação de Ampère passa a escrever-se

$$(IV) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right)$$

Designamo-la por equação de Maxwell-Ampère. Ela vai ser incorporada ao sistema das equações de Maxwell para os corpos em repouso, conjuntamente com as equações (I), (II) e (III) que recapitulámos no § V.2.1.

Afirma-se tácitamente que o campo magnético produzido pela corrente de deslocamento, além de respeitar a equação (IV) no tocante ao seu rotacional, cumpre entretanto  $\text{div } \vec{B} = 0$ , como o campo magnético de qualquer corrente de condução — e portanto ainda em conformidade com a hipótese de Maxwell. Donde

(\*) Fica bem explicitado que a hipótese de Maxwell se reporta tão-só aos efeitos magnéticos, o que quer dizer que a corrente de deslocamento não produz calor de Joule, o outro efeito que sempre acompanha uma corrente de condução. Isto é perfeitamente coerente com o facto de que a corrente de deslocamento não se constitui de um fluxo organizado de cargas eléctricas, à escala macroscópica. Mostrou-se com efeito que o calor de Joule resulta do trabalho (negativo) realizado pelas forças resistentes ao movimento efectivo de cargas eléctricas num meio condutor. (Cf III.5, fg 130).

resulta que a equação (II) permanece formalmente idêntica a si própria, como já se admitira — e compatível com a hipótese de Maxwell.

Pela equação (V-8), pág. V-13/7 — lei de Faraday — pode afirmar-se que a variação no tempo de um campo magnético produz um campo eléctrico (campo eléctrico induzido). Agora, pelas equações de Maxwell-Ampère — pelo seu termo adicional — poderá afirmar-se que a variação no tempo de um campo eléctrico produz um campo magnético. A hipótese de Maxwell aparece assim como uma espécie de contrapartida, com certa reciprocidade, à lei da indução electromagnética.

Deve observar-se que, não atingindo a corrente de deslocamento, mesmo nos dieléctricos, valores comparáveis com os de uma corrente de condução senas para frequências muito elevadas (no mínimo da ordem de grandezas de  $10^6$  a  $10^7$   $\text{seg}^{-1}$ ) não era possível, ao tempo de Maxwell, obter qualquer teste experimental de validade da equação de Maxwell-Ampère, ou seja, estabelecer a realidade física dos efeitos magnéticos da corrente de deslocamento. Só à volta de vinte anos mais tarde (1888) é que Hertz estabeleceu pela primeira vez, experimentalmente, a existência de ondas electromagnéticas — utilizando precisamente circuitos oscilantes na região das radio-frequências — e portanto provou indirectamente a realidade física da corrente de deslocamento e dos seus efeitos magnéticos, que até então estavam vedada à evidência experimental.

É importante notar desde logo que a equação (IV)

assegura automaticamente  $\text{div } \vec{C} = 0$ , equações que, combinada com (I), conduz à equações de conservação da carga eléctrica, (V.2-2), que assim se verifica ficar implicitamente incluída no sistema das equações de Maxwell. Era de resto o que devíamos esperar, dada a intervenção essencial de (V.2-2) na concepção de (IV).

### V.2.4 — Sistema das equações de Maxwell para os corpos em repouso

Maxwell reuniu em sistema as equações (I), (II), (III) e (IV) de que nos ocupámos nos parágrafos precedentes :

$$(V.2.-6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \text{div } \vec{D} = \rho \\ \text{(II)} \quad \text{div } \vec{B} = 0 \\ \text{(III)} \quad \text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \text{(IV)} \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \end{array} \right.$$

É este sistema das equações de Maxwell para os corpos em repouso que constitui a base de interpretação de todos os fenómenos electromagnéticos à escala macroscópica. Neste sistema se encerram os Princípios fundamentais do Electromagnetismo.

No sistema das equações de Maxwell, o campo electromagnético encontra-se representado por dois pares de vectores :  $(\vec{E}; \vec{D})$  para descrever o campo eléctrico ; e  $(\vec{H}; \vec{B})$  para descrever o campo magnético. Entre estes

vectores, há no entanto relações que importa ter presentes: as chamadas equações de ligação dos campos às induções

$$(V.2-7) \quad \begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{cases}$$

não podem com efeito deixar de acompanhar o sistema de equações de Maxwell (V.2-6).

Para bem definir uma situação electromagnética concreta por meio do sistema de equações de Maxwell, combinadas com (V.2-7), devem ser perfeitamente conhecidas as diferentes grandezas físicas intervenientes no processo, a saber:

(a) as distribuições das cargas ( $\rho$ ), das correntes ( $\vec{J}$ ) e dos campos aplicados ( $\vec{E}^a$ ) em todo o ponto do espaço e a cada instante;

(b) as propriedades eléctricas e magnéticas dos meios materiais presentes, as quais são traduzidas pelas distribuições  $\vec{P}(Q, t)$  e  $\vec{M}(Q, t)$ .

Em geral porém, a maior parte destes dados do problema electromagnético dependem essencialmente dos próprios campos eléctricos e magnéticos — e é esse envolvimento que torna muito complexa a busca de soluções.

Em muitos casos, alguns dos dados devem ser substituídos pelo conhecimento das suas leis de dependência relativamente aos campos — leis que resultam de um conhecimento empírico. É o caso de  $\vec{P}$ ,  $\vec{M}$  e  $\vec{J}$  que se introduzem quase sempre no problema sob a forma de equações materiais:



$$(V.2-8) \quad \vec{P} = f(\vec{E}) ; \quad \vec{M} = g(\vec{H}) ; \quad \vec{J} = k(\vec{E})$$

Em numerosos casos, importantes na prática, estas equações são lineares, o que simplifica muito o problema.

Em princípio, as quatro equações de Maxwell, combinadas com (V.2-7), devem fornecer a divergência e o rotacional de dois dos campos ( $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , por exemplo); e, a partir daí, o teorema de Helmholtz garante o conhecimento dos próprios campos  $\vec{E}(\mathcal{P}, t)$  e  $\vec{B}(\mathcal{P}, t)$ .

Conhecidos os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , produzidos por certas fontes, mediante as equações de Maxwell, pode determinar-se a acção do campo electromagnético sobre uma partícula electrizada  $e$ , movendo-se com uma velocidade  $\vec{v}$ , pela fórmula de Laplace-Lorentz:

$$(V.2-9) \quad \vec{f} = e \left( \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

Com o conhecimento desta força pode então estudar-se o movimento da partícula electrizada (de massa  $m$ ) no campo electromagnético, com o recurso à equação de Newton (em dinâmica pré-relativista).

Assim, as equações de Maxwell, combinadas com a força de Laplace-Lorentz e com a leis de Newton do movimento, podem conduzir a uma descrição completa da dinâmica clássica de partículas electrizadas em interacção com campos electromagnéticos.

}

Índice Geral dos Elementos de Estudo — 3º TESTE

Capítulo IV — 2ª Parte : Campo magnético dos ímãs  
Pag : 187 a 209 [+ 210 - 213]

Capítulo V — 1ª Parte : Indução electromagnética  
Pag : V-1ª/1 a V-1ª/11 e 12

— 2ª Parte : Teoria de Maxwell do Electromagnetismo  
Pag : V-2ª/1 a V-2ª/13

— 3ª Parte : Ondas electromagnéticas  
§§ 1, 1' e 2

Pag : V-3ª/1 a V-3ª/17

§ 3

Pag : V-3ª/3-1 a V-3ª/3-11

— 4ª Parte : Circuitos RL e RLC em regime quasi-estacionário

Pag : V-4ª/1 a V-4ª/

— Apêndice I : Energia magnética no campo estacionário

Pag : V.Ap.I/1 a V.Ap.I/12

— Apêndice II : Integração das equações de Maxwell

Pag : V.Ap.II/1 a V.Ap.II/4 e 5

Capítulo VII : Óptica Geométrica - Pág: VII-1 a VII-35

Capítulo VIII : Interferências - Pág: VIII-1 a VIII-21

## CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

## 3ª PARTE — ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 1. — Propagação do campo electromagnético. Ondas planasV.3.1.1 — A equação de onda

Consideremos uma região do espaço inteiramente preenchida por um meio não-condutor, sem histerese, linear, isotrópico e homogéneo nas suas propriedades eléctricas e magnéticas. Suponhamos que nesta região se estabelece um campo electromagnético variável por acção de fontes completamente exteriores ao domínio de observação considerado.

Em cada ponto desta região, as relações materiais de ligação dos campos às induções são bem definidas (não há q.g. histerese) e escrevem-se simplesmente como relações lineares

$$(V.3 - 1) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad ; \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

em que  $\epsilon$  e  $\mu$  são escalares (meio isotrópico) e os mesmos para todos os pontos (meio homogéneo) — i.e., constantes que são características do meio. Por outro lado, em toda a região se verifica que

$$(V.3 - 2) \quad \vec{E}^a = 0 \quad ; \quad \vec{J} = 0 \quad ; \quad \rho = 0$$

porque as fontes são supostas completamente exteriores ao domínio de observação considerado e não há sequer aí uma densidade de corrente  $\sigma \vec{E}$ , pois o meio é não-condutor.

Nestas condições, simplifica-se muito o sistema de equações que rege o campo electromagnético observável na região considerada. Com efeito, das equações de Maxwell na sua forma mais geral

$$(V.3-3) \quad \begin{cases} \text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & ; \quad \text{div} \vec{B} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{1}{c} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) & ; \quad \text{div} \vec{D} = \rho \end{cases}$$

resulta, pela introdução de (V.3-1) e (V.3-2):

$$(V.3-4) \quad \begin{cases} \text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & ; \quad \text{div} \vec{H} = 0 \\ \text{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} & ; \quad \text{div} \vec{E} = 0 \end{cases}$$

ou seja, um sistema de equações em  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , homogêneas do 1º grau nas primeiras derivadas de  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  em ordem a  $x, y, z, t$ .

O sistema (V.3-4) é ainda, sem dúvida, um sistema de equações simultâneas em  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ ; mas acontece que é possível, dada a sua simplicidade, separar os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , desde que nos resignemos a passar a um sistema de equações diferenciais de 2º ordem. Vejamos como se processa essa separação.

- (1) Apliquemos o operador rot à 1ª equação (V.3-4).
- (2) Tenhamos presente a identidade  $\text{rot rot } \vec{G} = \text{grad div } \vec{G} - \text{lap } \vec{G}$ .
- (3) Reparemos que os operadores rot e  $\partial/\partial t$  comutam entre si; e façamos a substituição do rot  $\vec{H}$  pelo 2º membro da 3ª equação (V.3-4). (4) Recorramos à 4ª equação (V.3-4). — Resulta, enfim, uma equação só em  $\vec{E}$ :

$$(V.3-5) \quad \text{lap} \vec{E} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

Um tratamento análogo da 3ª equação, com recurso às 1ª e 2ª eqs, conduz a uma equação só em  $\vec{H}$ :

$$(V.3-6) \quad \text{lap} \vec{H} - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0$$

Os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  satisfazem assim a equações diferenciais de 2º ordem perfeitamente idênticas. Se tivermos

agora em atenção que  $\text{lap } \vec{G} = \sum_{\alpha} (\text{lap } G_{\alpha}) \vec{e}_{\alpha}$  ( $\alpha = x, y, z$ ;  $\vec{e}_{\alpha}$ , vectores unitários cartesianos), torna-se claro que as equações (V.3-5) e (V.3-6) se projectam nos eixos cartesianos exactamente com uma forma idêntica para cada uma das componentes de  $\vec{E}$ , ou de  $\vec{H}$ . Então, podemos resumir as duas propriedades (V.3-5) e (V.3-6) dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , respectivamente, numa única propriedade do campo electromagnético, afirmando que: — Nas condições de observação definidas para a situação acima descrita, qualquer componente cartesiana,  $\Psi$ , do campo electromagnético (representado pelo par de vectores  $(\vec{E}; \vec{H})$ ) satisfaz à equação diferencial

$$(V.3-7) \quad \text{lap } \Psi - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

(em que  $\Psi$  representa indistintamente  $E_x, E_y, E_z$  ou  $H_x, H_y, H_z$ )  
Introduziu-se em (V.3-7) a grandeza

$$(V.3-8) \quad a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

constante característica do meio material, com as dimensões de  $LT^{-1}$ , i.e., de uma velocidade — que desempenha um papel de importante significado físico, adiante esclarecido.

A propriedade que acabámos de estabelecer é uma consequência do jogo das equações de Maxwell como sistema; e deve notar-se que para a simetria deste resultado concorre de modo essencial a presença do termo  $\epsilon \partial \vec{E} / \partial t$  — a corrente de deslocamento — na 3ª equação de (V.3-4). Vê-se assim que uma tal propriedade envolve globalmente o conjunto dos Princípios fundamentais do Electromagnetismo, achando-se, particularmente, em estreita conexão com a hipótese de Maxwell, sobre os efeitos magnéticos da corrente de deslocamento.

Convém observar desde logo que as duas equações (V.3-5) e (V.3-6) — e também obviamente (V.3-7) — subsistem com a mesma forma, mudando apenas as constantes  $\underline{\epsilon}$  e  $\underline{\mu}$  em  $\underline{\epsilon}_0$  e  $\underline{\mu}_0$  — a em  $a_0 = c/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$  — quando imaginamos que a região de observação é toda ela, simplesmente, vácuo. A propriedade em vias de estudo é válida também para o vácuo.

Ora as equações (V.3-5 e 6), ou (V.3-7), significam que o campo electromagnético, nas condições de observação definidas para a situação acima descrita, se propaga por ondas, com a velocidade  $a$ , dada por (V.3-8). Vamos ver nos §§ seguintes qual o sentido físico preciso desta afirmação.

A equação (V.3-7) recebe por isso a designação de equação de onda, sendo  $\Psi$  frequentemente nomeada função de onda.

### V.3.1.2 — Integração da equação de onda

Vamos procurar integrar a equação de onda num caso particularmente simples que, embora resulte de uma fonte restringida nas condições de observação, constitui ainda assim um exemplo largamente representativo de possíveis situações de campo electromagnético realmente observável. Queremos referir-nos ao caso em que supomos que as fontes, que já considerávamos exteriores, se afastam para uma distância indefinidamente grande da região de observação (para infinito), segundo uma orientação bem determinada. Acha-se tipicamente nestas condições o campo electromagnético que observamos proveniente de uma estrela.

Tomemos para eixo dos  $xx$  a orientação segundo a qual as fontes se afastaram para infinito. Então é fácil concluir que os observadores de um mesmo plano perpendicular ao eixo dos  $xx$ ,

dentro da região de observação, detectam todos, em cada instante, um mesmo valor para o campo electromagnético (um mesmo valor para cada uma das suas componentes, quer de  $\vec{E}$ , quer de  $\vec{H}$ )  
 Por outras palavras,  $\Psi$ , em geral função de  $\underline{P}$  e de  $\underline{t}$ , fica, nesta situação particular, dependente exclusivamente de  $\underline{x}$  e de  $\underline{t}$  e a equação de onda (V.3-7), para uma função de onda  $\Psi(x, t)$ , simplifica-se na forma

$$(V.3-9) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0$$

Para integrar esta equação pode adoptar-se o processo que se desenvolve pelos seguintes passos:

(1) Com  $at = \theta$ , a eq. (V.3-9) escreve-se

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} = 0$$

admitindo o 1.º membro a "factorização"

$$(V.3-10) \quad \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Psi = 0$$

(2) Fazamos agora a mudança de variáveis  $(x, \theta) \rightarrow (u, v)$  definida por

$$\begin{cases} u = x - \theta \\ v = x + \theta \end{cases} \iff \begin{cases} x = (u+v)/2 \\ \theta = (v-u)/2 \end{cases}$$

Tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial u} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial v} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial v} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \Psi \end{cases}$$

o que nos conduz a mudar (V.3-10) em:

$$(V.3-11) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u \partial v} = 0$$

(3) Ora, a eq. (V.3-11) integra-se facilmente; com efeito: a) numa primeira etapa,

$$\frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) = 0 \implies \frac{\partial \Psi}{\partial u} = f(u)$$

(i.e.,  $\frac{\partial \Psi}{\partial u}$  deve ser uma constante em  $\underline{v}$ , portanto uma função exclusiva de  $\underline{u}$ , arbitrária, seja  $f(u)$ );

b) numa segunda etapa,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial u} = f(u) \implies \Psi = F(u) + G(v)$$

(i.e.,  $\Psi$  deve igualar uma primitiva de  $f(u)$ , seja  $F(u)$ , mais uma constante em  $\underline{u}$ , portanto uma função exclusiva de  $\underline{v}$ , arbitrária, seja  $G(v)$ ).

Em conclusão, a solução geral da equação diferencial (V.3-9) apresenta-se sob a forma:

$$(V.3-12) \quad \Psi(x, t) = F(x-at) + G(x+at)$$

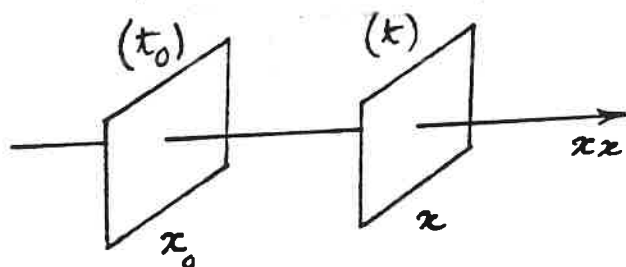
em que  $\underline{F}$  e  $\underline{G}$  são funções arbitrárias dos respectivos argumentos  $\underline{u} = x - at$  e  $\underline{v} = x + at$ . Como pode observar-se, a equação diferencial (V.3-9) impõe às suas soluções modos especiais de organização das variáveis  $\underline{x}$  e  $\underline{t}$  em ordem à dependência funcional  $\Psi(x, t)$ : a função  $\Psi$  deve depender de  $\underline{x}$  e de  $\underline{t}$  através de um argumento  $\underline{u} = x - at$  ou através de um argumento  $\underline{v} = x + at$ , e isto, mediante funções arbitrárias  $F(u)$  ou  $G(v)$ . São estes modos especiais de organização espaço-temporal que se encontram na base da interpretação física que pode dar-se às soluções da equação de onda, (V.3-12), como vai ser feito.

### V.3.1.3 — Propagação por ondas planas



Tomemos a solução  $F(x-at)$  e admitamos que  $F(u)$  é uma função unívoca de  $u$  como convém ao significado físico de qualquer  $\Psi$ . Consideremos a família dos planos perpendiculares ao eixo dos  $xx$ , dentro da região de observação.

Seja  $\Psi(x_0, t_0)$  o valor assumido por uma dada componente do campo electromagnético (diremos simplesmente: valor assumido pelo campo) sobre o plano de abscissa  $x_0$ , no instante  $t_0$  ( $x_0$  e  $t_0$  quaisquer). É fácil inferir que um idêntico valor do campo é assumido (vai ser ou já foi) sobre um qualquer outro plano, de abscissa  $x$ , nalgum instante  $t$ .



Com efeito, para que se cumpra

$$\Psi(x, t) = \Psi(x_0, t_0)$$

ou seja

$$F(x-at) = F(x_0-at_0)$$

basta que  $x$  e  $t$  satisfaçam a condição

$$(V.3-13) \quad x-at = x_0-at_0$$

que constitui uma simples equação em  $t$ , sempre possível e de solução aceitável, fixado  $x \neq x_0$ . Isso significa que o campo representado pela função  $\Psi(x, t) = F(x-at)$  reassume, sem qualquer modificação, em todos os planos da família, dentro da região de observação, o valor que assume num dado instante  $t_0$  sobre o plano de abscissa  $x_0$ . Nós exprimimos esta propriedade dizendo que os valores do campo se propagam de um plano para outro ao longo da direcção do eixo dos  $xx$ .

Dizemos também que o campo se propaga como uma onda, e falamos de propagação por ondas planas, para ter em conta a distribuição espacial dos valores do campo em cada instante.

Mas a condição (V.3-13), que constitui a lei que rege esta propagação, equivale a:

$$(V.3-14) \quad x - x_0 = a(t - t_0)$$

Então, o valor  $\Psi(x_0, t_0)$ , que o campo assume sobre o plano  $x_0$  no instante  $t_0$ , é reassumido sobre um plano genérico, de abscissa  $x$  num instante  $t$  tal que, por (V.3-14), se perfaça o intervalo de tempo  $t - t_0$  necessário para se vencer precisamente o espaço  $x - x_0$  (distância entre os dois planos), com movimento uniforme e rectilíneo ao longo e no sentido do eixo dos  $xx$ , de velocidade  $a$ . Isto leva-nos a atribuir à propagação um carácter de movimento abstracto, com as características do movimento uniforme e rectilíneo, ao longo e no sentido do eixo dos  $xx$  e de velocidade  $a$ .

Em suma, dizemos que  $F(x - at)$  representa uma onda plana que se propaga, sem deformação, na direcção e sentido positivo do eixo dos  $xx$ , com a velocidade  $a$ . Semelhantemente,  $G(x + at)$  representa uma onda plana que se propaga na direcção e no sentido negativo do eixo dos  $xx$ , com a mesma velocidade  $a$ . Entendemos que esta propagação se realiza sempre na perspectiva da cinemática do movimento uniforme e rectilíneo.

V.3.1.4 — Em conclusão, o campo electromagnético, observável nas condições pormenorizadamente descritas no § V.3.1.1, com a restrição que depois foi feita no início do § V.3.1.2, propaga-se por ondas planas com a velocidade  $a$ . A grandeza  $a = c/\sqrt{\epsilon\mu}$ , com as dimensões  $LT^{-1}$ , assume assim o carácter físico de uma velocidade, a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas no meio considerado.

Um dos maiores sucessos da teoria de Maxwell foi prever a existência de ondas electromagnéticas cuja velocidade de propagação podia ser conhecida teoricamente e medida. 8/2/91

## CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

## 3ª PARTE — ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 1'. — Radiamento electromagnético.  
Vector de PoyntingV.3.1'.1 — Energia electromagnética total

Uma análise aprofundada do comportamento energético do campo electromagnético regido pelas equações de Maxwell sob a sua forma mais geral (\*), leva a admitir que, apesar do carácter simultâneo dessas equações, para efeito do cálculo da energia total há simplesmente sobreposição dos campos eléctrico e magnético. A energia electromagnética total compõe-se então, sem mais, da soma das energias eléctrica e magnética obtidas, na situação geral, mediante expressões formalmente idênticas às que eram válidas no campo electrostático e no campo magnetostático, respectivamente, na concepção de Maxwell (em termos dos campos).

Recordemos que a energia de um sistema electrostático, na presença de dieléctricos perfectos e isotrópicos (Cf. § 10.5, pag 14) se escreve

$$(V.3-16) \quad W_e = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{D} \, dv$$

A analogia entre o campo magnético dos ímãs e a electrostática dos dieléctricos polarizados permite inferir que a energia de um sistema magnetostático para meios magnéticos lineares e isotrópicos deve ter uma expressão semelhante

$$(V.3-17) \quad W_m = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \vec{H} \cdot \vec{B} \, dv$$

(\*) J. D. Jackson, Classical Electrodynamics Sec. 6-8. 1ª ed.

O problema da energia magnética para um um sistema de correntes é objecto de um tratamento contido no Apêndice I ao Capítulo V.<sup>(\*)</sup> Aí se mostra que a expressão (V.3-17) é válida também no domínio do campo magnético das correntes.

A energia electromagnética total virá então dada pela reunião das duas expressões (V.3-16) e (V.3-17) quando nelas se introduzem os campos que descrevem a situação geral:

$$(V.3-18) \quad W_{em} = W_e + W_m$$

Nas expressões (V.3-16) e (V.3-17) os integrais estendem-se a todo o espaço  $\Omega$ . Mas justamente na concepção de Maxwell, somos levados a admitir a distribuição de energia por todo o espaço e a localização de uma parcela de energia em todo o elemento de volume em que os campos estejam definidos. Isso conduz-nos a adoptar como densidade volumica da energia electromagnética total,  $w_{em}$ , a expressão

$$(V.3-19) \quad w_{em} = w_e + w_m = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B})$$

### V.3.1'.2 — Equação de balanço energético

Suponhamos que a observação do campo electromagnético se realiza ainda nas condições definidas no § V.3.1.1 e procuremos agora averiguar o comportamento energético do campo nesta situação. Para isso, retomamos o sistema das equações de Maxwell, (V.3-4), sob a forma simplificada que obtivemos para este caso; e temos em atenção que (V.3-19) se escreve agora, por introdução de (V.3-1):

$$(V.3-20) \quad w_{em} = w_e + w_m = \frac{1}{2} (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2)$$

(\*) Recomendado para consulta; de estudo facultativo.

Ora, as equações de evolução do sistema (V.3-4) permitem encontrar as taxas de variação no tempo das densidades de energia magnética e eléctrica, respectivamente. Com efeito, internando a 1ª por  $\vec{H}$  e a 2ª por  $\vec{E}$ , resulta:

$$(V.3-21) \quad \begin{cases} \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \cdot \vec{H} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial w_m}{\partial t} \\ \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H} = \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{E} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 \right) = \frac{1}{c} \frac{\partial w_e}{\partial t} \end{cases}$$

E para a taxa de variação no tempo da densidade de energia electro-magnética total vem, por (V.3-20):

$$c (\vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right)$$

que, por utilização de uma conhecida identidade diferencial ( $\vec{y} \cdot \text{rot} \vec{x} - \vec{x} \cdot \text{rot} \vec{y} = \text{div} (\vec{x} \wedge \vec{y})$ ), se simplifica para:

$$(V.3-22) \quad \text{div} (c \vec{E} \wedge \vec{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right)$$

Integrando (V.3-22) para um volume  $v$ , qualquer, dentro da região de observação considerada, vem

$$\int_v \text{div} (c \vec{E} \wedge \vec{H}) dv = -\int_v \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2 \right) dv;$$

aplicando ao 1º membro o teorema do fluxo-divergência e permutando no 2º membro os símbolos  $\frac{\partial}{\partial t}$  e  $\int_v \dots dv$  — o que é lícito para corpos em repouso —, obtém-se

$$(V.3-23) \quad \int_S c \vec{E} \wedge \vec{H} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} \int_v (\epsilon \vec{E}^2 + \mu \vec{H}^2) dv \right]$$

em que  $S$  é a superfície limitrofe do volume  $v$ .

Segundo a concepção de Maxwell da distribuição e localização da energia electromagnética, dentro dos parêntesis rectos do 2º membro da eq. (V.3-23) figura a energia electromagnética

localizada no volume  $\underline{v}$ , ou contida no volume  $\underline{v}$ . Adoptando esta concepção, a eq. (V.3-23) afirma que: a taxa de diminuição com o tempo da energia electromagnética contida no volume  $\underline{v}$ , iguala o fluxo do vector

$$(V.3-24) \quad \vec{\Sigma} = c \vec{E} \wedge \vec{H}$$

que sai através da superfície  $S$  limítrofe do volume  $\underline{v}$ . A grandeza definida por (V.3-24) diz-se vector de Poynting.

Não há na situação considerada, em qualquer volume  $\underline{v}$  dentro da região de observação, outras energias postas em jogo para além da energia electromagnética — e isto porque, por um lado, as fontes são completamente exteriores, e por outro lado, o meio é não-condutor e sem histerese. Então, se admitirmos o princípio de conservação da energia, a energia electromagnética perdida, ou ganha, no volume  $\underline{v}$ , em dado intervalo de tempo, deve ser comunicada aos elementos de volume vizinhos, ou deles exaurida, no mesmo intervalo de tempo, e naturalmente, através da superfície limítrofe do volume  $\underline{v}$ . Ora, pela eq. (V.3-23), o fluxo do vector de Poynting  $\vec{\Sigma}$  é o instrumento adequado para traduzir o transporte dessa energia.

O fluxo do vector de Poynting interpreta-se pois como o fluxo de energia electromagnética que passa através de  $S$  (que sai), por unidade de tempo; e a equação do balanço energético, (V.3-23), traduz o princípio de conservação da energia electromagnética no volume  $\underline{v}$ :

$$(V.3-23') \quad \int_S \vec{\Sigma} \cdot \vec{n} \, dS = - \frac{dW_{em}}{dt}$$

Utiliza-se também, frequentemente, a versão local deste princípio que se retira de (V.3-22):

$$(V.3-22')$$

$$\operatorname{div} \vec{\Sigma} = - \frac{\partial w_{em}}{\partial t}$$

# CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

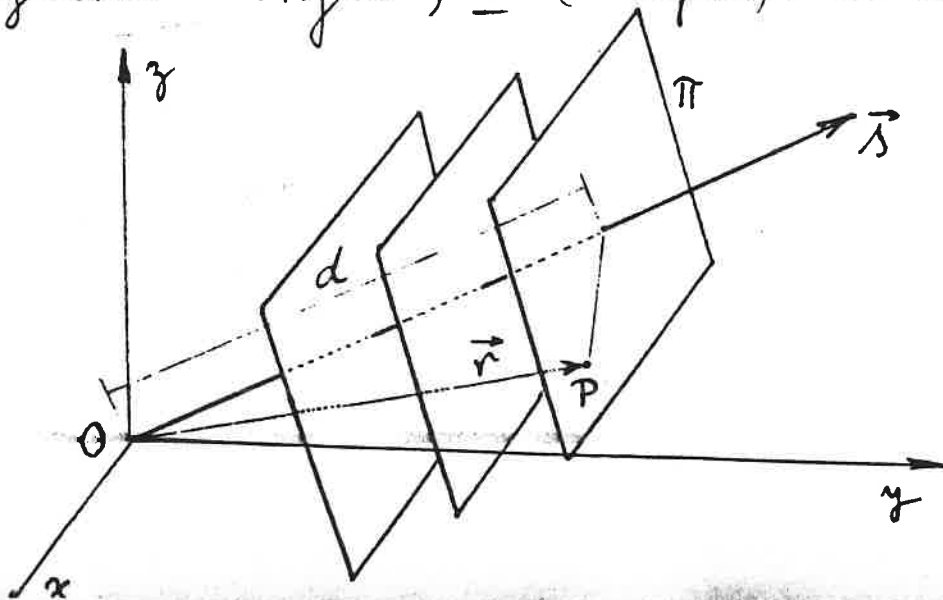
## 3ª PARTE — ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### § 2. — Características gerais das ondas planas electromagnéticas

#### V.3.2.1 — Representação geral de uma onda plana

Continuamos a pensar num campo electromagnético observável nas condições descritas no § V.3.1.1, com a restrição que depois foi feita no início do § V.3.1.2. Trata-se assim de um campo electromagnético que se propaga por ondas planas, com a velocidade  $\underline{a}$ , ao longo da orientação segundo a qual as fontes se afastaram para infinito. Seja essa orientação representada agora, de uma maneira geral, pelo vector unitário  $\vec{s}$ .

Isto significa que, em cada instante, os observadores de cada plano da família de planos  $\Pi$  perpendiculares à direcção de propagação  $\vec{s}$  detectam todos o mesmo valor do campo. Então, na representação analítica atrás adoptada para a função de onda,  $\Psi(\underline{x}, t) = F(\underline{x} - \underline{a}t)$ , a abscissa  $\underline{x}$  deve ser substituída pela variável que lhe corresponde e a generaliza na nova representação, a saber, a distância do plano  $\Pi$  genérico à origem,  $\underline{d}$ . (V. Figura). Se nos reportarmos ao



observador genérico sobre o plano  $\Pi$ , ou seja, ao ponto  $P$ , então temos

$$d = \vec{r} \cdot \vec{s}$$

e esta expressão substitui  $\underline{x}$  em  $\Psi(\underline{x}, t)$ .

Com o mesmo significado que no § V.3.1.2, utiliza-se agora a variável intermediária

$$(V.3-25) \quad u = \vec{r} \cdot \vec{s} - at = x_1 x + y_1 y + z_1 z - at$$

A função de onda, num ponto  $\underline{P}$ , num instante  $\underline{t}$  escreve-se em consequência

$$(V.3-26) \quad \underline{\Psi}(P, t) = F(u) = F(\vec{r} \cdot \vec{s} - at)$$

Prova-se facilmente que a função (V.3-26) é solução da equação de onda na sua forma mais geral (V.3-7). É com base nesta representação geral de uma onda plana que vamos de seguida averiguar quais as condições impostas às ondas planas electromagnéticas pelas equações de Maxwell. Este regresso às equações de Maxwell impõe-se porquanto as propriedades que até agora conhecemos para as ondas electromagnéticas planas resultaram apenas da equação de onda — uma consequência das equações de Maxwell, não equivalente às equações de Maxwell. Desejando obter uma informação mais completa, deve procurar-se a fonte de informação máxima.

### V.3.2.2 — Condições impostas pelas equações de Maxwell às ondas planas electromagnéticas

Utilizaremos obviamente as equações de Maxwell sob a forma simplificada já obtida para a situação aqui considerada, a saber, o sistema (V.3-4). Tendo em atenção que todas as componentes dos campos respeitam uma dependência espaço-temporal com a estrutura dada por (V.3-26), convém começar por averiguar quais as simplificações daí decorrentes para os operadores que figuram nas equações (V.3-4). Nesta ordem de ideias, é fácil reconhecer que:



$$(1) \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \frac{d}{du} = -a \frac{d}{du}$$

 $u = \vec{r} \cdot \vec{s} - at$ 

$$(2) \quad \vec{\nabla} = \vec{\nabla} u \frac{d}{du} = \vec{\nabla}(\vec{r} \cdot \vec{s}) \frac{d}{du} = \vec{s} \frac{d}{du}$$

$$(3) \quad \text{rot } \vec{G} = \vec{\nabla} \wedge \vec{G} = \vec{s} \wedge \frac{d\vec{G}}{du} = \frac{d}{du}(\vec{s} \wedge \vec{G})$$

$a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}$

$$(4) \quad \text{div } \vec{G} = \vec{\nabla} \cdot \vec{G} = \vec{s} \cdot \frac{d\vec{G}}{du} = \frac{d}{du}(\vec{s} \cdot \vec{G})$$

Utilizando estas relações, as eq. (V.3-4) transformam-se em

$$(V.3-27) \quad \begin{cases} \frac{d}{du}(\vec{s} \wedge \vec{E}) = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{d\vec{H}}{du} & ; \quad \frac{d}{du}(\vec{E} \cdot \vec{s}) = 0 \\ \frac{d}{du}(\vec{s} \wedge \vec{H}) = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{d\vec{E}}{du} & ; \quad \frac{d}{du}(\vec{H} \cdot \vec{s}) = 0 \end{cases}$$

sendo  $u$ , a variável intermediária dada por (V.3-25).

Estas equações (V.3-27) são, evidentemente, de integração imediata na variável  $u$  de que dependem exclusivamente todas as funções intervenientes. Tem-se, a menos de constantes aditivas arbitrárias (constantes como funções de  $u$ ):

$$(V.3-28) \quad \begin{cases} \vec{s} \wedge \vec{E} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \vec{H} & ; \quad \vec{E} \cdot \vec{s} = 0 \\ \vec{s} \wedge \vec{H} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \vec{E} & ; \quad \vec{H} \cdot \vec{s} = 0 \end{cases}$$

As constantes de integração omitidas em (V.3-28) devem, de facto, tomar-se como nulas, uma vez que, constantes em  $u$ , só poderão representar campos estáticos e uniformes — os quais se não propagam, constituindo assim soluções estranhas ao problema físico de que nos ocupamos.

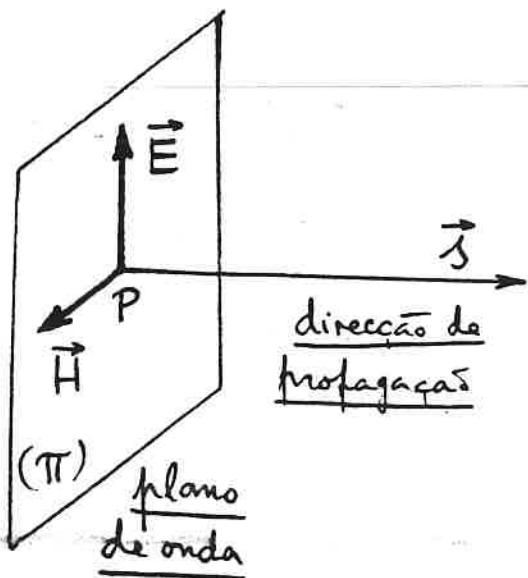
As soluções físicas aceitáveis como campo electromagnético (variável) organizado em onda plana propagando-se

segundo a orientação  $\vec{s}$ , obedecerão portanto às equações (V.3-28) que constituem as pretendidas condições impostas pelas eq. de Maxwell às ondas planas electromagnéticas. É de notar que as eq. (V.3-28) se reduzem efectivamente às duas primeiras, visto que destas se podem extrair directamente as duas últimas, as quais atestam entã apenas a consistência das soluções obtidas.

### V.3.2.3 — Características gerais das ondas planas electromagnéticas

As características gerais das ondas planas electromagnéticas consubstanciam-se obviamente nas eq. (V.3-28) que acabámos de estabelecer. Convém no entanto extrair desde já algumas dessas características gerais, muito simples e da maior importância em todas as aplicações.

Em primeiro lugar, vê-se pelas eq. (V.3-28) que os vectores  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  são perpendiculares entre si e ambos perpendiculares à direcção de propagação  $\vec{s}$ ; os três vectores  $\vec{s}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , por esta ordem, constituem um triedro triortogonal directo. Como a figura indica,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , vectores-campo definidos num ponto genérico P, assentam no plano de onda que passa por P,  $(\Pi)$ , em todo o instante. Assim, as ondas planas electromagnéticas são essencialmente transversais.



Em segundo lugar, as eq. (V.3-28) permitem encontrar a relação

existente entre os módulos de  $\vec{E}$  e de  $\vec{H}$ . Tem-se, com efeito, a partir de qualquer das primeiras duas eq. (V.3-28) :

$$(V.3-29) \quad \underline{\sqrt{\epsilon} |\vec{E}| = \sqrt{\mu} |\vec{H}|}$$

É uma relação extremamente importante, que se reflecte, muito directamente, a nível energético, na versão que dela se pode obter quadrando ambos os membros e dividindo por 2 :

$$(V.3-30) \quad \underline{\frac{1}{2} \epsilon \vec{E}^2 = \frac{1}{2} \mu \vec{H}^2} \quad ;$$

ou seja : as densidades volumicas de energia eléctrica e de energia magnética associadas a uma onda plana electro-magnética são em cada ponto, em cada instante, iguais entre si. (  $w_e = w_m$ , Cf. § V.3.1' )

Em terceiro lugar, podem utilizar-se as eq. (V.3-28) para obter uma expressão, que é bastante simples e de interpretação física muito interessante, para o vector de Poynting de uma onda plana electromagnética. Essa expressão vem de resto como uma consequência das características gerais que já foram extraídas. Com efeito, basta usar o facto de que  $\vec{s}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  constituem um triedro triortogonal directo, mais as relações (V.3-29) e (V.3-30) para justificar

$$\text{que: } \vec{\Sigma} = c \vec{E} \wedge \vec{H} = c |\vec{E}| |\vec{H}| \vec{s} = 2 w_e a \vec{s}$$

(recorrendo a (V.3-24) e a (V.3-8)). Ou seja :

$$(V.3-31) \quad \vec{\Sigma} = w_{em} a \vec{s}$$

Então, o vector de Poynting numa onda plana electromagnética tem a orientação (direcção e sentido) da propagação,  $\vec{s}$ , e módulo igual ao produto da velocidade de propagação  $a$ , pela densidade volumica da energia electromagnética,  $w_{em}$ . 912190

# CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

## 3ª PARTE — ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### § 3 — Ondas planas monocromáticas. Polarização das ondas pl. monocromáticas

V. 3.1 — De todas as formas que podem assumir as funções  $\Psi(u)$  representativas de uma onda plana propagando-se segundo uma dada orientação  $\vec{s}$  ( $u = \vec{r} \cdot \vec{s} - at$ ), destacam-se com particular interesse as funções periódicas harmónicas. Podemos dar-lhes a expressão

$$(1) \quad \Psi(u) = A \sin(ku - \delta)$$

sendo  $k$  e  $A$  constantes positivas, com toda a generalidade.  $A$  é o valor máximo da componente do campo eléctrico ou magnético que  $\Psi(u)$  representa;  $k$  é uma grandeza tal que o produto  $ku$  se assimila a um ângulo; e  $\delta$  é um ângulo constante. Toda a função da forma (1) representa uma onda plana monocromática, de amplitude  $A$  e fase  $ku - \delta$ ;  $-\delta$ , fase inicial, na origem do triedro de referência (para  $t=0$  e  $\vec{r}=0$ ), é o valor da fase sempre que seja  $u=0$ .

Dada a dependência espacio-temporal da grandeza  $u$ , a periodicidade de  $\Psi(u)$  resulta em cada ponto fixo numa periodicidade temporal, caracterizada por um período,  $T$ , e para cada determinado instante numa periodicidade espacial, caracterizada pelo chamado comprimento de onda,  $\lambda$ . Os dois períodos, espacial e temporal, relacionam-se de maneira extremamente simples.

Com efeito, a variação da fase da onda,  $k\Delta u$ , para um período ( $\Delta t = T \Rightarrow \Delta u = aT$ ) ou para um comprimento de onda marcado ao longo da direcção de propagação ( $\Delta(\vec{r} \cdot \vec{s}) = \lambda \Rightarrow \Delta u = \lambda$ ) deve igualar o mesmo valor  $2\pi$ , que é o período da função seno. Teremos assim

$$(2a) \quad \left\{ \begin{array}{l} kaT = 2\pi \\ k\lambda = 2\pi \end{array} \right.$$

Donde resulta:

$$(3) \quad \boxed{\lambda = aT}$$

Os inversos dos períodos são também muito utilizados. Define-se frequência (ou frequência temporal),  $\nu$ , como o número de períodos (temporais) contidos na unidade de tempo

$$(4) \quad \nu = \frac{1}{T} \quad ;$$

e define-se número de ondas (ou frequência espacial),  $n$ , como o número de comprimentos de onda (períodos espaciais) contidos na unidade de comprimento

$$(5) \quad n = \frac{1}{\lambda}$$

Tem-se evidentemente

$$(6) \quad v = na$$

como uma versão de (3).

Também se usam ainda as noções de frequência angular temporal,

$$(7) \quad \omega = 2\pi v = \frac{2\pi}{T}$$

e de frequência angular espacial, como o produto análogo de  $n$  por  $2\pi$  :  $2\pi n$  que (2b) e (5) permitem identificar com  $k$ :

$$(8) \quad k = 2\pi n = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Fica assim esclarecido o significado físico da constante  $k$ , introduzida em (1).

Tem-se evidentemente

$$(9) \quad \omega = ka$$

como uma outra versão de (3).

A parte variável da fase de  $\psi(u)$  em (1)  $\varphi = ku$  pode pôr-se agora sob as diferentes formas

$$(10a) \quad \varphi = 2\pi \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{\lambda} - \frac{t}{T} \right)$$

$$(10b) \quad \varphi = \omega \left( \frac{\vec{r} \cdot \vec{s}}{a} - t \right)$$

$$(10c) \quad \varphi = k \vec{r} \cdot \vec{s} - \omega t$$

As grandezas  $k$ , escalar positivo, e  $\vec{s}$  orientação da propagação associam-se habitualmente na grandeza

$$(11) \quad \vec{k} = k\vec{s}$$

que se chama vector de onda ; isso dá a (10c) a nova forma

$$(10d) \quad \varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$$

que é talvez a maneira mais frequente de representar a parte variável (espacio-temporal) da fase de uma onda de frequência (angular temporal)  $\omega$  e vector de onda  $\vec{k}$ .

V.3.2 - Vamos agora averiguar o comportamento do campo electro-magnético monocromático, organizado em onda plana, num dado plano de onda.

Tomemos a direcção e sentido de propagação para eixo dos  $zz$ ; com isso, em razão da transversalidade da onda plana os campos só têm componentes segundo os eixos dos  $xx$  e dos  $yy$  e, por exemplo para o campo eléctrico  $\vec{E}$ , teremos

$$(12) \quad \begin{cases} E_x = A_x \sin(\varphi - \delta_x) \\ E_y = A_y \sin(\varphi - \delta_y) \end{cases} \quad (E_z = 0)$$

Aqui,  $\varphi = ku = kz - \omega t$  é o mesmo nas duas componentes,  $E_x$  e  $E_y$ , ambas monocromáticas da mesma frequência. Mas as amplitudes  $A_x$  e  $A_y$  e as fases iniciais  $\delta_x$  e  $\delta_y$  são em geral diferentes e independentes entre si.

Nestas condições, sobre um qualquer plano de onda, a extremidade do vector campo eléctrico descreve ao longo do tempo uma curva necessariamente fechada, em razão da periodicidade, e sem pontos impróprios, por serem limitadas as componentes do campo. Essa curva é o lugar geométrico dos pontos do plano de onda com coordenadas  $E_x$  e  $E_y$  (nos eixos respectivos), dadas por (12) para o valor de  $z$  correspondente a esse plano de onda.

Um tal lugar geométrico obter-se-á eliminando o tempo nas equações (12); mas a eliminação do tempo consegue-se pela eliminação de  $\varphi$ , uma vez que  $z$  é fixo. Desenvolvendo (12), vem

$$(13) \quad \begin{cases} E_x/A_x = \sin \varphi \cos \delta_x - \cos \varphi \sin \delta_x \\ E_y/A_y = \sin \varphi \cos \delta_y - \cos \varphi \sin \delta_y \end{cases}$$

e extraíndo  $\sin \varphi$  e  $\cos \varphi$  destas equações, obtém-se

$$(14) \quad \begin{cases} \sin \varphi \sin(\delta_y - \delta_x) = -\frac{E_x}{A_x} \sin \delta_y + \frac{E_y}{A_y} \sin \delta_x \\ \cos \varphi \sin(\delta_y - \delta_x) = -\frac{E_x}{A_x} \cos \delta_y + \frac{E_y}{A_y} \cos \delta_x \end{cases}$$

Quadrando e somando, resulta finalmente:

$$(15) \quad \frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - 2 \frac{E_x E_y}{A_x A_y} \cos \Theta = \sin^2 \Theta$$

com  $\theta = \sigma_y - \sigma_x$ . O lugar geométrico procurado é portanto uma cônica que, por ter discriminante não nulo

$$\left( \frac{1}{A_x^2 A_y^2} (1 - \cos^2 \theta) \right) > 0 ,$$

é especificamente uma elipse, o que está de acordo com as previsões atrás feitas (curva fechada, sem pontos impróprios).

Trata-se de uma elipse inscrita num rectângulo cujos lados são paralelos aos eixos dos  $xx$  e dos  $yy$  medindo respectivamente  $2A_x$  e  $2A_y$ ; a elipse é tangente a este rectângulo nos pontos  $(\pm A_x, \pm A_y \cos \theta)$  e  $(\pm A_x \cos \theta, \pm A_y)$

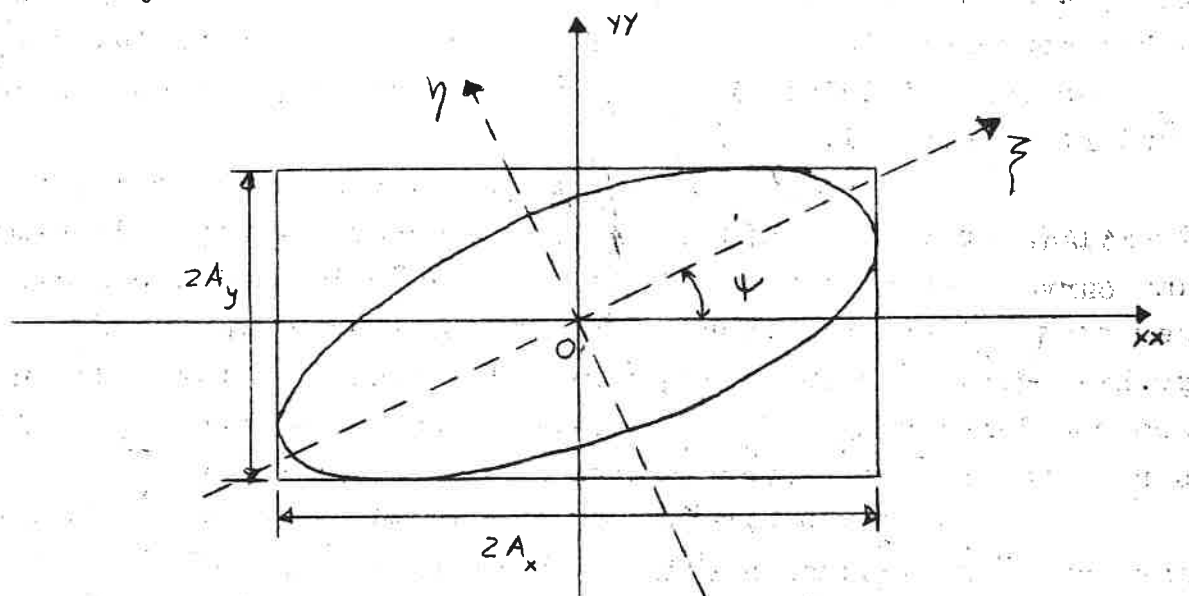


Figura 1

Em geral, os eixos principais da elipse  $O\xi$  e  $O\eta$  não são paralelos aos eixos de referência (v. figura 1), fazendo o eixo maior  $O\xi$  um ângulo  $\psi$  com o eixo dos  $xx$ , dado por

$$(16) \quad \operatorname{tg} 2\psi = \frac{2A_x A_y}{A_x^2 - A_y^2} \cos \theta$$

É claro que a excentricidade da elipse também dependerá de  $A_x$ ,  $A_y$  e  $\theta$ .

Todos estes resultados podem ser obtidos a partir de cálculos simples de geometria analítica. Nomeadamente a obtenção do ângulo  $\psi$  faz-se mediante uma rotação dos eixos que leva o sistema de referência a coincidir com os eixos principais da elipse vindo para a equação (15) a forma reduzida

$$(17) \quad \frac{\xi^2}{A^2} + \frac{\eta^2}{B^2} = 1$$

sendo  $A$  e  $B$  as medidas dos semi-eixos maior e menor, que do mesmo passo se calculam.

Considerando agora o campo magnético, é fácil concluir que a extremidade do vector  $\vec{H}$  descreve uma curva do mesmo tipo que a descrita por  $\vec{E}$  visto que a partir das relações (12) e da relação  $\vec{H} = \sqrt{\epsilon/\mu} \vec{s} \wedge \vec{E}$  (Cf. o estudo das ondas planas), resulta:

$$(18) \quad \begin{cases} H_x = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_y \sin(\varphi - \delta_y) \\ H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} A_x \sin(\varphi - \delta_x) \end{cases}$$

Trata-se de uma elipse cujas características se achariam semelhantemente.

São estas conclusões que levam a dizer que a onda plana monocromática é, de uma maneira geral, polarizada elípticamente. O conhecimento da elipse descrita por  $\vec{E}$  (ou por  $\vec{H}$ ) constitui a definição do estado de polarização da onda. Os diferentes tipos especiais de estados de polarização, estão associados com certos valores bem definidos de  $\theta$  e de  $A_x/A_y$ .

**V. 3.3** — Há dois casos de particular interesse:

a) Se  $\theta = m\pi$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) e com qualquer relação  $A_x/A_y$ , então  $\sin \theta = 0$  e  $\cos \theta = (-1)^m$  e a elipse reduz-se a um segmento de recta:

$$(19) \quad E_y = (-1)^m \frac{A_y}{A_x} E_x$$

que coincide com uma diagonal do rectângulo  $[2A_x, 2A_y]$ , a dos quadrantes ímpares ( $m$  par) ou a dos quadrantes pares ( $m$  ímpar) — ver fig. 2a e b, respectivamente.

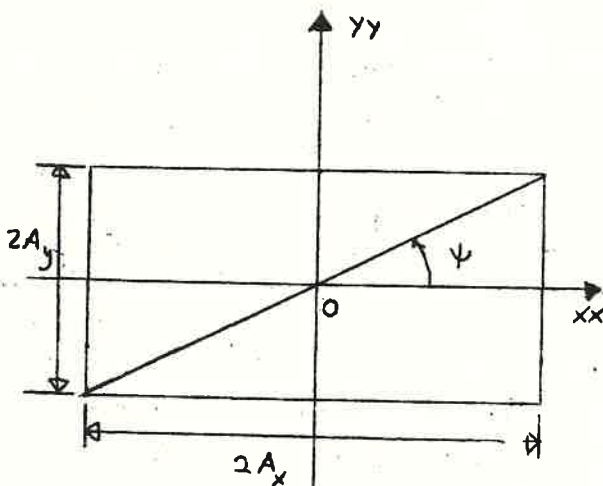


fig 2a

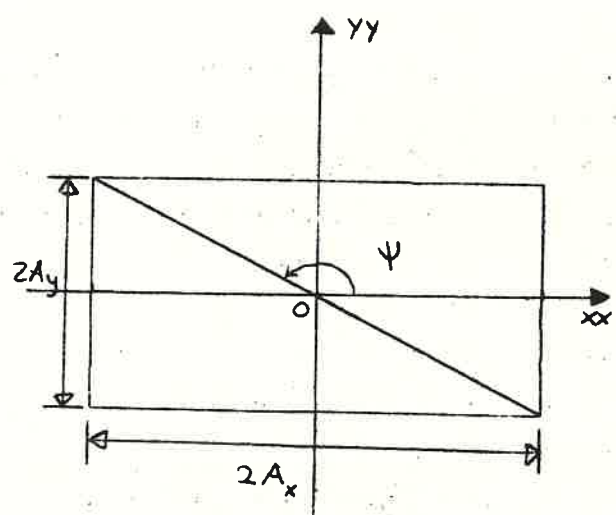


fig 2b



É a degenerescência de uma elipse que se reduz ao seu eixo maior (pode ver-se a partir de (16) que se tem neste caso  $\text{tg } \psi = (-1)^m A_y/A_x$ ) ; a medida do respectivo semi-eixo é  $A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ .

Diz-se que a onda é polarizada linearmente ou que apresenta polarização linear. O vector  $\vec{E}$  (e também o vector  $\vec{H}$ ) vibra (com uma amplitude  $A$ ) numa direcção bem definida (inclinada de  $\psi$  sobre o eixo dos  $xx$ ) e pode falar-se de uma completa polarização se quisermos atender ao significado etimológico deste termo.

b) Se  $\Theta = (2k+1) \pi/2$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) e se  $A_x = A_y = A$ , então, com  $\cos \Theta = 0$  e  $\sin \Theta = 1$ , a elipse reduz-se a uma circunferência de raio  $A$  (figura 3). O módulo de  $\vec{E}$  (ou de  $\vec{H}$ ) conserva-se constante no decurso do tempo e roda no plano de onda com velocidade angular  $\omega$ .

Diz-se que a onda é polarizada circularmente ou que apresenta polarização circular.

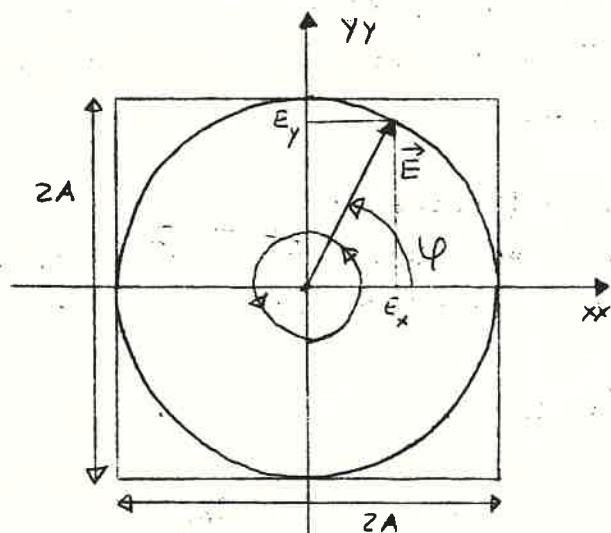


Figura 3

Uma escolha adequada da origem dos tempos permitiria escrever, neste caso, as eq. (12) sob a forma

$$(20) \quad \begin{cases} E_x = A \cos \psi \\ E_y = A \cos(\psi - \delta) \end{cases}$$

com  $\delta = \pm \pi/2$ , uma vez que a fase é definida a menos de um número inteiro de  $2\pi$ . (Na fig. 3 é  $\delta = +\pi/2$ ).

**V.3.4** — Para polarização elíptica ou circular, tem em certos casos interesse o sentido em que o vector  $\vec{E}$  descreve a elipse ou a circunferência, que define o estado de polarização da onda, relativamente a um observador colocado em face do plano de onda de modo a receber a onda na sua propagação. Convencionalmente, a polarização diz-se esquerda se a curva é descrita, para esse observador, no sentido directo e diz-se direita no caso contrário. Mostra-se que o vector  $\vec{H}$  descreve a sua própria elipse de polarização no mesmo sentido que o vector  $\vec{E}$  (basta considerar a relação  $\vec{H} = \sqrt{\epsilon/\mu} \vec{s} \wedge \vec{E}$ ).

Com base nas eq. (12) pode ver-se que o sentido de polarização depende essencialmente do valor de  $\theta$ ; se  $\theta$  cai no 1º ou 2º quadrante — polarização esquerda; se  $\theta$  cai no 3º ou 4º quadrante — polarização direita. Para o caso particular da polarização circular, isso comprova-se facilmente sobre a figura 3, com a ajuda das equações (20): circular esquerda, se  $\delta = +\pi/2$ ; circular direita, se  $\delta = -\pi/2$ .

**V. 3.5** — Vejamos agora as relações existentes entre os diferentes tipos de polarização.

Em primeiro lugar, como ressalta do próprio tratamento do assunto atrás desenvolvido, é válida a seguinte afirmação: Sobrepondo duas ondas planas monocromáticas (da mesma frequência) polarizadas linearmente em ângulo recto, podemos obter qualquer um dos tipos de polarização indicados, desde que essas duas ondas tenham amplitudes e diferença de fases convenientes. Nas eq. (12), com efeito, cada uma das componentes  $E_x$  ou  $E_y$  se pode considerar uma onda polarizada linearmente e é da sua sobreposição que surgem os diferentes tipos de estados de polarização.

E é válida também, evidentemente, a afirmação inversa: Toda a onda plana monocromática, com qualquer estado de polarização, se pode decompor em duas ondas planas monocromáticas da mesma frequência e polarizadas linearmente em ângulo recto.

Isto significa que a polarização linear deve tomar-se como básica pois a ela se reduz qualquer tipo de polarização. Mas a polarização circular é igualmente um tipo básico de polarização. Pode, com efeito, mostrar-se que:

Toda a onda plana monocromática, com qualquer estado de polarização, se pode decompor em duas ondas planas monocromáticas da mesma frequência e polarizadas circularmente uma esquerda e outra direita.

**V. 3.6** — Para chegar a este resultado vai-nos ser útil adoptar a representação complexa da função harmónica (1),  $\tilde{\psi} = A e^{i(\varphi - \delta)}$  ( $\varphi = ku$ ), introduzida pela relação

$$(21) \quad \psi = A \cos(\varphi - \delta) = R [A e^{i(\varphi - \delta)}] = R(\tilde{\psi})$$

Isto conduz a substituir as eq. (12) por

$$(22) \quad \begin{cases} \tilde{E}_x = A_x e^{i(\varphi - \delta_x)} \\ \tilde{E}_y = A_y e^{i(\varphi - \delta_y)} \end{cases} \quad (\varphi = ku)$$

Vejamos antes de mais que nesta representação complexa, e tendo em atenção as eq. (20), uma onda polarizada circularmente descreve-se por meio de:

$$(23) \quad \begin{cases} \tilde{E}_x = A e^{i\varphi} \\ \tilde{E}_y = A e^{i(\varphi - \delta)} \end{cases} \quad (\text{com } \delta = \pm \pi/2)$$

Donde resulta que as componentes (complexas) de uma tal onda satisfazem a:

$$(24a) \quad \tilde{E}_x - e^{i\delta} \tilde{E}_y = 0$$

ao mesmo tempo que verificam

$$(24b) \quad \tilde{E}_x + e^{i\delta} \tilde{E}_y \neq 0$$

com  $\delta = \pm \pi/2$ . Então a polarização circular caracterizar-se-á por

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_x - i\tilde{E}_y = 0 \\ \tilde{E}_x + i\tilde{E}_y \neq 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{quando seja } \underline{\text{circular}} \\ \underline{\text{esquerda}} \quad (\delta = +\pi/2) \end{array}$$

e por

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tilde{E}_x + i\tilde{E}_y = 0 \\ \tilde{E}_x - i\tilde{E}_y \neq 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{quando seja } \underline{\text{circular}} \\ \underline{\text{direita}} \quad (\delta = -\pi/2) \end{array}$$

**V. 3.7.** Posto isto, consideremos uma onda plana  $\vec{E}$  monocromática com um qualquer estado de polarização, (propagando-se segundo o eixo dos  $z$ , como temos vindo a considerar) e sejam  $\tilde{E}_x$  e  $\tilde{E}_y$  as suas componentes dadas de uma maneira geral por (22) em representação complexa. Para simplificar a escrita omitiremos porém, sistematicamente, o símbolo "til" ( $\sim$ ) sobre as grandezas complexas  $\tilde{E}_x, \tilde{E}_y$ , a partir daqui.

Ponhamos

$$(27) \quad E_1 = \frac{E_x + iE_y}{2} \quad ; \quad E_2 = \frac{E_x - iE_y}{2}$$

e "construamos" duas ondas que designaremos por  $\vec{E}^{(e)}$  e  $\vec{E}^{(d)}$  com as seguintes componentes

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x^{(e)} = E_1 \\ E_y^{(e)} = -iE_1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E_x^{(d)} = E_2 \\ E_y^{(d)} = iE_2 \end{array} \right.$$

Verifiquemos em primeiro lugar que as duas ondas assim construídas reconstituem, quando sobrepostas, a onda inicialmente dada:

$$(29) \quad \vec{E} = \vec{E}^{(e)} + \vec{E}^{(d)}$$

Com efeito, de (28) e (27) resulta:

$$\begin{cases} E_x^{(e)} + E_x^{(d)} = E_1 + E_2 = E_x \\ E_y^{(e)} + E_y^{(d)} = -iE_1 + iE_2 = E_y \end{cases}$$

Verifiquemos em segundo lugar que a onda  $\vec{E}^{(e)}$  é circular esquerda, de harmonia com (25), enquanto  $\vec{E}^{(d)}$  é circular direita, de harmonia com (26). De facto, de (28) resulta

$$(30) \quad \begin{cases} E_x^{(e)} - iE_y^{(e)} = 0 \\ E_x^{(e)} + iE_y^{(e)} \neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} E_x^{(d)} + iE_y^{(d)} = 0 \\ E_x^{(d)} - iE_y^{(d)} \neq 0 \end{cases}$$

devendo notar-se que as condições da 2ª linha só não se cumprem quando a onda inicialmente dada fôr já polarizada circularmente direita ou esquerda, respectivamente (recorra a (27)).

E as verificações (29) e (30) provam o teorema a que queríamos chegar. Deve observar-se que as amplitudes das duas ondas circulares em que  $\vec{E}$  se decompõe são em geral diferentes.

### [ Tratamento alternativo dos assuntos dos §§ V.3.6 - 7

Consideremos uma onda plana monocromática, propagando-se numa dada orientação  $\vec{s}$  (com um certo vector de onda  $\vec{k}$ ). As direcções dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  situam-se obviamente sobre planos perpendiculares a  $\vec{s}$  (ou a  $\vec{k}$ ), de modo que se pode adoptar uma base de dois vectores unitários  $\vec{\xi}_j$  ( $j=1,2$ ) perpendiculares entre si ( $\vec{\xi}_1 \cdot \vec{\xi}_2 = 0$ ) e a  $\vec{k}$  ( $\vec{\xi}_j \cdot \vec{k} = 0$ ), para a representação dos campos. Para o campo eléctrico, por exemplo, a composição mais geral, representando uma onda monocromática nas referidas condições, e utilizando representação complexa, é a seguinte

$$(A) \quad \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \quad \text{com} \quad \begin{cases} \vec{E}_1 = \vec{\xi}_1 E_1 e^{i\varphi} \\ \vec{E}_2 = \vec{\xi}_2 E_2 e^{i\varphi} \end{cases}$$

em que  $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$  e  $E_1$  e  $E_2$  são amplitudes complexas (do tipo  $A_x e^{-i\delta_x}$ ,  $A_y e^{-i\delta_y}$ ). Pode ainda escrever-se

$$(B) \quad \vec{E} = (\vec{\xi}_1 E_1 + \vec{\xi}_2 E_2) e^{i\varphi}$$

Nesta representação caracterizam-se os diferentes tipos de polarização da seguinte maneira:

- (1)  $E_1$  e  $E_2$  com fases não iguais nem opostas, ou com módulos diferentes quando as fases difiram de  $\pi/2$  — polarização elíptica.
- (2)  $E_1$  e  $E_2$  com a mesma fase ou em oposição de fase — polarização linear.
- (3)  $E_1$  e  $E_2$  com o mesmo módulo e diferença de fase de  $\pi/2$  — polarização circular.

Neste último caso pode dar-se a (B) um aspecto diferente:

$$(|E_1| = |E_2| = E_0 \quad ; \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \pm \pi/2 \quad )$$

$$(C) \quad \vec{E} = E_0 (\vec{\varepsilon}_1 \pm i \vec{\varepsilon}_2) e^{i\varphi}$$

e tem-se a seguinte correspondência

$$(D) \quad \begin{cases} \vec{\varepsilon}_1 + i \vec{\varepsilon}_2 & \text{circular esquerda} \\ \vec{\varepsilon}_1 - i \vec{\varepsilon}_2 & \text{circular direita} \end{cases}$$



Para um observador que recebe a onda.

Estas duas ondas polarizadas circularmente formam por sua vez uma base igualmente aceitável para a descrição do estado geral de polarização.

Introduzamos, com efeito, em vez da base  $\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2$ , esta outra base de dois vectores complexos

$$(E) \quad \vec{\varepsilon}_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{\varepsilon}_1 \pm i \vec{\varepsilon}_2)$$

com as seguintes propriedades evidentes:

$$(F) \quad \begin{cases} \vec{\varepsilon}_{+}^* \cdot \vec{\varepsilon}_{+} = 1 \\ \vec{\varepsilon}_{+}^* \cdot \vec{\varepsilon}_{-} = 0 \\ \vec{\varepsilon}_{-}^* \cdot \vec{k} = 0 \end{cases}$$

Então, a representação (B) no caso geral assume a forma

$$(G) \quad \vec{E} = (E_{+} \vec{\varepsilon}_{+} + E_{-} \vec{\varepsilon}_{-}) e^{i\varphi}$$

com

$$E_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_1 \mp i E_2)$$

Pode agora sugerir-se, como exercício, a busca das condições que devem satisfazer  $E_{+}$  e  $E_{-}$  para uma polarização elíptica de cara-

I-3e  
3-11

cterísticas pré-fixadas, ou mais simplesmente, para uma polarização linear, de dada direcção. ]

V. 3.8 — Em princípio, uma onda plana monocromática (propagando-se num meio homogéneo indefinido, como se exige no âmbito desse conceito-limite) mantém inalterável o estado de polarização que a caracteriza. Em face porém de descontinuidades do meio em que se propaga, em face de obstáculos, ou nas diversas interacções do campo electromagnético com a matéria, são de esperar comportamentos diferentes das diferentes componentes do campo no plano de onda, dada a distribuição em geral assimétrica de tais causas de acidentes na propagação da onda.

Assim, a modificação do estado de polarização de uma onda plana monocromática constitue um aspecto muito relevante na interpretação dos fenómenos de reflexão-refracção, de difracção, de difusão da luz e bem assim dos processos semelhantes ocorrendo na propagação de quaisquer outras perturbações electromagnéticas.

Mas não fica por aqui a importância do estudo da polarização das ondas.

A birrefringência da luz observada nos cristais e, de um modo geral, os processos ligados à propagação dos campos electromagnéticos nos meios anisótrópos revelam também efeitos de polarização proeminentes, com múltiplas aplicações técnicas.

Não se deve ainda deixar de referir que certos meios macroscopicamente homogéneos e isótrópos, possuindo todavia determinadas propriedades especiais de anisotropia à escala microscópica (justificadas por típicas constituições moleculares), produzem espontaneamente uma importante modificação do estado de polarização das ondas que neles progridem (rotação do plano de polarização pelos meios "òpticamente activos").

Uma rotação do plano de polarização pode observar-se de resto em certos meios tão-sòmente pela influência de um campo magnético estático (efeito Faraday) e, de uma maneira mais geral, modificações essenciais do estado de polarização acompanham a acção de um campo magnético sobre as ondas dimanadas dos sistemas atómicos (efeito de Zeeman).

E diversos outros exemplos podem citar-se.

Uma descrição completa do campo exige, como temos visto, a especificação da sua grandeza bem como da sua orientação, ambas como funções de  $P$  e de  $t$ . Contudo, por serem muito elevadas as frequências dos campos ópticos (cerca de  $10^{14}$   $\text{seg}^{-1}$ ), não podem medir-se, num dado ponto, os valores instantâneos de qualquer dessas quantidades, mas somente os seus valores médios no tempo, sobre intervalos muito grandes em comparação com os períodos ópticos.

A experiência mostra que a luz natural, directamente recebida da fonte e observada nas condições acima referidas, não apresenta diferenças de propriedades nas diferentes orientações perpendiculares à direcção de propagação; quer dizer, não há nenhuma orientação preferencial do campo observável. Posta de parte a ideia de uma polarização circular que produziria sem dúvida este mesmo resultado médio mas exigiria uma perfeita regularidade no comportamento da fonte emissora, devemos concluir que a luz natural não pode descrever-se como uma onda num estado de polarização bem definido; e neste sentido dir-se-á que a luz natural não é polarizada.

Na verdade o comportamento caótico dos microsistemas que constituem a fonte, leva a admitir a seguinte hipótese até hoje ainda não contraditada:

A luz natural é polarizada durante curtos intervalos de tempo  $\delta t$ , ao fim dos quais o estado de polarização muda bruscamente dum maneira aleatória, irregular, totalmente arbitraria. Os curtos intervalos de tempo  $\delta t$  seriam, nesta hipótese, muito grandes comparados com o período  $T$  da vibração luminosa ( $\delta t \sim 10^6 T$ ) de tal modo que é possível conceber um estado de polarização perfeitamente definido ao longo de cada  $\delta t$  (sendo a mesma elipse de polarização descrita no plano de onda cerca de um milhão de vezes). Mas os intervalos  $\delta t$  seriam ainda assim muito pequenos comparados com os intervalos de tempo em que um fenómeno luminoso pode ser observado experimentalmente ( $T \sim 10^{-15}$   $\text{seg} \Rightarrow \delta t \sim 10^{-9}$   $\text{seg}$ ); e a distribuição estatística do numeroso conjunto destes estados de polarização bem definidos (mas não observáveis), dentro de cada intervalo de tempo de medição, daria os efeitos médios que a experiência revela, acima descritos.

No âmbito da mesma hipótese se podem interpretar os efeitos acarretados para a luz natural pelas modificações do estado de polarização que acompanham os fenómenos luminosos, tais como os citados no parágrafo precedente (8). Suponhamos com

efeito que um acidente de propagação ou uma interacção com a matéria modifica de uma maneira precisa o estado de polarização da onda, bem definido, dentro de cada intervalo  $\delta t$ . Então nós somos levados a concluir que uma causa sistemática influe sobre a distribuição estatística dos estados de polarização contidos num intervalo de medição. Ora esta causa sistemática vai certamente provocar alterações dos efeitos médios, que podem traduzir-se na criação de uma assimetria das propriedades observáveis, nas diferentes orientações perpendiculares à direcção de propagação. Seriam assim gerados efeitos de "polarização" da luz natural.



## CAPÍTULO IV

### CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIABLE

#### 3ª PARTE

### ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

§ 4 — Sobreposición de ondas planas monocromáticas. Dispersión. Grupos de ondas; velocidad de grupo.

# CAPÍTULO V - CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

## 3ª PARTE - ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### § 4 - Sobreposição de ondas planas monocromáticas. Dispersão. Grupos de ondas; velocidade de grupo.

§ 4.1 - Sobreposição de ondas planas monocromáticas — Não só por razão de simplicidade, mas também pela sua importância no tratamento geral das ondas electromagnéticas, até agora apenas nos ocupámos de ondas planas monocromáticas, com uma frequência  $\omega$ , um número de onda  $k$  e uma velocidade de propagação  $a$  bem definidas (achando-se as três grandezas relacionadas por  $\omega = ka$ , como se sabe). Tais soluções matemáticas da equação de onda, estas ondas assim idealizadas, não ocorrem porém na natureza<sup>(\*)</sup>. Mesmo com a fonte luminosa a mais "monocromática", com um rádio-transmissor (ou rádio-receptor) o mais refinadamente sintonizado, sempre nos damos conta de estar

(\*) Uma onda plana monocromática — definida com a mesma amplitude em todos os pontos do espaço (de  $-\infty$  a  $+\infty$  nas 3 dimensões) e para um intervalo de tempo absolutamente indefinido (de  $t = -\infty$  a  $t = +\infty$ ) — constitui, de resto, uma abstracção em elevado grau, fisicamente inaceitável de um todo. Presta entretanto inestimáveis serviços como componente dos desenvolvimentos de Fourier mediante os quais se podem exprimir matematicamente os campos de carácter físico concreto (ou ao menos com uma realidade física plausível), em função do espaço e do tempo.

em face de um espraio de frequências (ou de comprimentos de onda) por um intervalo finito embora possa ser por vezes muito curto. Este espraio pode resultar, por exemplo, da duração limitada do impulso electromagnético ou do alargamento inerente à própria fonte. É pois de um conjunto de ondas de frequências variadas, digamos, quase sempre em distribuição contínua, ou com sub-conjuntos de distribuições contínuas — que temos de nos ocupar na realidade. Visto que numa região desprovida de fontes, como aquela que temos vindo a adoptar para as nossas observações das ondas electromagnéticas, as equações de Maxwell são lineares e homogêneas, a solução global capaz de representar um conjunto de ondas é, sem qualquer dúvida, uma sobreposição linear das soluções que correspondem às diferentes frequências. Assim, tal conjunto de ondas planas monocromáticas propagando-se na mesma orientação, para fixar ideias o eixo  $Oz$ , poderá traduzir-se por

$$(4.1) \quad \Psi(z, t) = \sum_{l=1}^n A_l e^{i(k_l z - \omega_l t)}$$

ou por

$$(4.2) \quad \Psi(z, t) = \int_{k_1}^{k_2} A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk$$

ou por uma representação mista de (4.1) e (4.2). Muitos autores designam tais entidades físicas e as suas representações por trens de ondas (planas monocromáticas).

Consideremos, de modo geral, um impulso eletromagnético, produzido sob larga variedade de condições experimentais, mas observado de tal modo que possua o mesmo valor em cada instante sobre cada plano de uma família de planos perpendiculares a um eixo,  $Oz$  (i.e., numa região de observação muito afastada da fonte ao longo desse eixo) e possuindo, além disso, uma forma muito geral de dependência espaço-temporal em  $\underline{z}$  e  $\underline{t}$ . Tal impulso pode ser representado, a partir da teoria dos integrais de Fourier, como construído por uma sobreposição linear de ondas harmônicas cobrindo o domínio completo de frequências:

$$(4.3) \quad \Psi(\underline{z}, \underline{t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) e^{i(kz - \omega t)} dk$$

Cada uma das componentes desta decomposição é uma onda plana monocromática, com amplitude infinitesimalmente pequena  $A(k) dk$ , e é a distribuição específica das densidades de amplitude,  $A(k)$ , que distingue uns dos outros os diferentes impulsos eletromagnéticos  $\Psi(\underline{z}, \underline{t})$ . A expressão (4.3) é a representação mais geral de um trem de ondas planas monocromáticas propagando-se segundo o eixo do  $z$ . Repare-se que é a composição de ondas planas monocromáticas — composição que tem obviamente uma mais ou menos forte capacidade redutora —

que lhes vai destruir o seu carácter altamente abstracto e fisicamente inaceitável, conduzindo a campos de carácter concreto, ou fisicamente plausíveis.

Assim, o impulso poderá ter no instante  $t=0$  a forma representada na figura 1

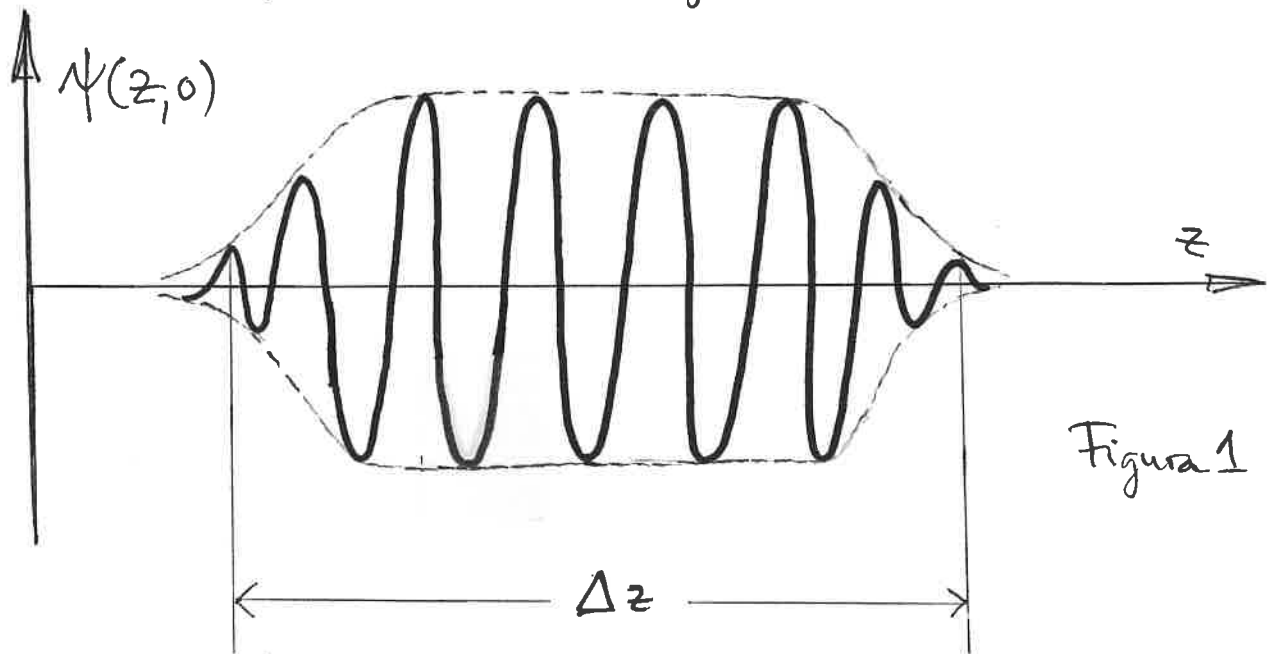


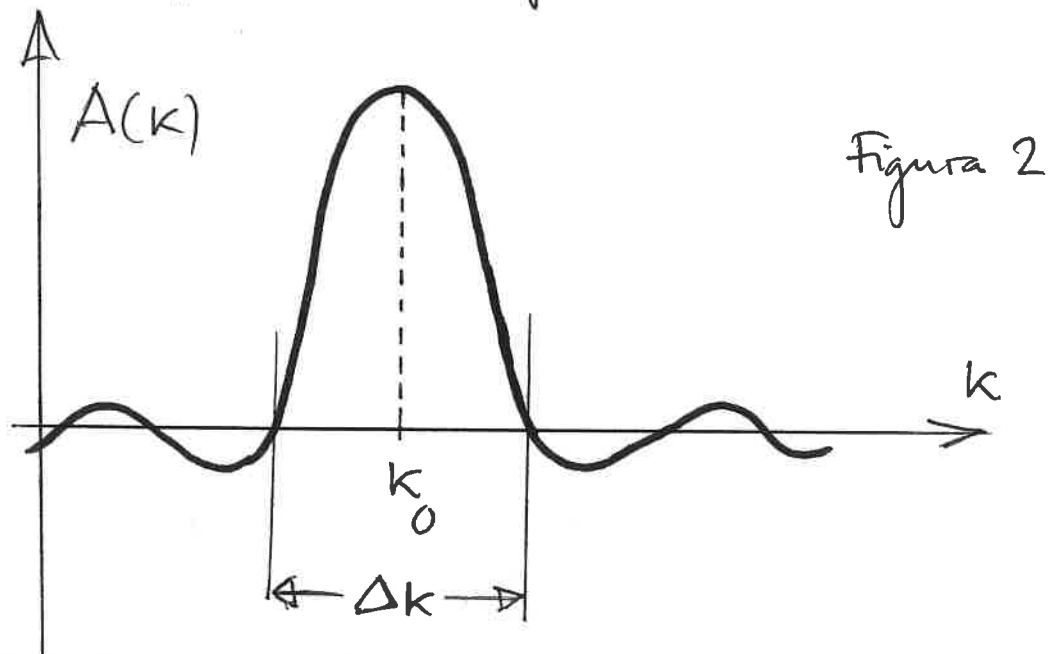
Figura 1

como uma delimitação bem marcada ao longo do eixo  $Oz$ . Para os observadores de cada plano perpendicular ao eixo dos  $zz$ , existirá, por um efeito semelhante, uma delimitação temporal bem marcada, igualmente.

A distribuição espectral das densidades de amplitude  $A(k)$  está, como é óbvio, relacionada com a forma instantânea do impulso ao longo de  $Oz$ , ou com a forma da curva  $\psi(z_0, t)$  do impulso no plano  $z=z_0$ , no decurso do tempo. Na teoria dos integrais de Fourier, pode mostrar-se que, sob certas condições simplificativas, se tem, por ex.

$$(4.4) \quad A(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(z, 0) e^{-ikz} dz$$

Para um impulso do tipo do representado na Figura 1, resulta de (4.4) uma distribuição espectral  $A(k)$  do tipo da da Figura 2 :



em que  $\Delta k$  constitui, por assim dizer, uma medida do intervalo de frequências a que correspondem as densidades de amplitude mais apreciáveis. (Para um esclarecimento mais completo deste assunto, para complemento de informações bibliográfica e para uma discussão de muito interesse relativamente à relação existente entre  $\Delta z$  e  $\Delta k$ , recomenda-se a leitura de J.D. JACKSON, *Classical Electrodynamics*, 2<sup>nd</sup> ed. (1974) §§ 7.8 e 7.9).

Em qualquer das composições lineares (4.1), (4.2), ou mais geralmente (4.3) — em contrapartida do carácter de plausibilidade física que conferem aos trens de ondas por elas traduzidos — importa desde logo salientar que não é de esperar que se mantenham

algumas das mais importantes características das ondas planas monocromáticas individuais; e tem obviamente interesse averiguar que novas propriedades poderão surgir da sua sobreposição linear.

Uma das propriedades importantes das ondas planas monocromáticas que não vai, em geral, subsistir na sobreposição é a velocidade de propagação de cada uma das componentes. Exceptua-se a isto, o caso em que a sobreposição (4.3), para fixar ideias, é suposta realizar-se para um impulso electromagnético que se propaga no vácuo. Então, para todas as componentes,  $\omega = k a_0$ , com  $a_0$  constante; e daí decorre que a associação espaço-temporal  $kz - \omega t = k(z - a_0 t)$  se reduz a uma associação  $z - a_0 t$ , a mesma para todas as componentes monocromáticas, ou seja:  $\Psi(z, t) = F(z - a_0 t)$ , com a mesma função  $F$  em todo o espaço e em todo o tempo: trata-se bem ainda de uma onda plana de amplitude indefinida, com uma velocidade de propagação,  $a_0$ , bem determinada, igual à velocidade de propagação da fase de cada uma das ondas planas monocromáticas componentes.

### § 4.2 — Dispersão

Mas o que acabámos de descrever como válido para o vácuo, não se cumpre mais para um meio material

porque aí, a velocidade de propagação das ondas planas monocromáticas componentes de  $\psi(z, t)$  — velocidade de fase,  $a = \frac{\omega}{k}$ , varia com a frequência das componentes:  $a = a(\omega)$ . Este efeito é por vezes forte, muitas vezes bastante moderado; mas existe sempre. Chama-se dispersão dos meios materiais; todo o meio material é mais ou menos dispersivo. Nos meios isolantes isso deve-se a que o poder indutor específico (constante dielétrica, nos meios homogêneos),  $\underline{\epsilon}$ , é função de  $\underline{\omega}$ . (\*)

Daí resulta que a associação espaço-temporal  $kz - \omega t$  não pode mais reduzir-se a uma simples associação independente de  $\underline{\omega}$ , mas sim a  $z - a(\omega)t$ .

O impulso electromagnético (4.3) vai ter em cada ponto, em cada instante, uma certa forma que pode variar de maneira muito sensível quando se passa de um a outro ponto e no decurso do tempo. O impulso electromagnético, porque a velocidade de propagação não é a mesma para as diferentes componentes, deforma-se na sua evolução ao longo do eixo dos  $zz$ . Perde todo o sentido a ideia de velocidade de propagação para o impulso global como a concebíamos até aqui. Persiste só a noção de velocidade de propagação de fase para cada uma das componentes (passamos a designá-la genericamente por  $v_f$ ).

---

(\*) Ver Nota da página seguinte.



Reparando que a função  $\omega(k) = ka$  se comporta como uma função linear de  $k$  nos meios não dispersivos — no vácuo —, e que nos meios dispersivos — meios naturais —  $\omega(k) = ka(k)$  é caracteristicamente uma função não-linear de  $k$  (em geral), torna-se conveniente escolher esta função para descrever a dispersão. A derivada  $\frac{d\omega}{dk}$  surge assim como um bom instrumento para aferir a dispersão do meio na medida em que, havendo dispersão, se afasta do valor constante ( $a_0$ ) que possui no vácuo; um grande valor de  $\frac{d\omega}{dk}$  (face a  $a_0$ ) traduzirá um meio fortemente dispersivo, uma fraca relação  $d\omega/dk$  para  $a_0$  representará um meio moderadamente dispersivo.

(\*) Nota à página anterior:

Como veremos (4ª Parte do Cap. V), nos meios condutores, para além desta dispersão com origem na variação de  $\underline{\epsilon}$  com  $\underline{\omega}$ , sempre presente, (e de que vamos dar uma interpretação microscópica no § seguinte) — surge ainda uma outra causa de distorção de um impulso electromagnético, ligada também à variação com  $\underline{\omega}$  das velocidades de fase das componentes monocromáticas do impulso. Ali, porém, são os próprios efeitos dissipativos da condutividade que provocam, além da atenuação das amplitudes das componentes do impulso, também uma variação directa de  $v_f$  com  $\underline{\omega}$  (cuja descrição física é feita a nível macroscópico).

### § 4.3 — Teoria elementar da dispersão $E(\omega)$ .

Neste parágrafo vamos expor sumariamente uma teoria elementar do fenómeno de dispersão que temos vindo a referir primordialmente, isto é, de como o poder indutor específico  $\underline{E}$  de um meio material depende da frequência  $\underline{\omega}$  do campo electromagnético que nele se instala. Suporemos para fixar ideias que o meio é constituído de moléculas não-polares, o que já significa que nos limitaremos aqui aos mecanismos de polarização por deformação das camadas electrónicas. Numa perspectiva muito ampla, em cada uma dessas moléculas, quando submetida a um campo electromagnético, gera-se um momento dipolar induzido porque os núcleos são deslocados das suas posições de equilíbrio e porque os estados de movimento dos electrões são substancialmente modificados. Um estudo bem fundamentado destas alterações constitui um problema complexo em Mecânica Quântica. É contudo plausível, e realmente confirmado pela teoria rigorosa, que numa boa primeira aproximação: (i) possa ser desprezada a contribuição produzida pelos deslocamentos dos núcleos, visto que as suas massas são muito maiores ( $10^4$  vezes) que as massas dos electrões; (ii) possa ser admitido que cada electrão na molécula se comporta como se se tratasse de uma partícula ligada a uma posição de equilíbrio por uma força de restituição quasi-elástica  $\vec{f} = -k\vec{r}$ . Na ausência de campo, o electrão ligado é regido por uma equação de movimento de oscilador

harmónico  $m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} = 0$ , que determina a lei  $\vec{r} = \vec{a}e^{-i\omega_0 t}$ , com  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ , frequência própria.

Na presença de um campo electromagnético, admitir-se-á que a velocidade do electrão ligado é pequena em face da velocidade da luz no vácuo, de tal modo que a contribuição do campo magnético pode ser desprezada na força de Laplace-Lorentz (tenha-se em conta que  $c = a_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ ), vindo então para equações do movimento modificado

$$(4.5) \quad m\ddot{\vec{r}} + k\vec{r} = -e\vec{E}$$

Se o campo se toma como harmónico no tempo, de frequência  $\omega$ ,  $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-i\omega t}$ , e porque estamos interessados no regime forçado, usamos a solução  $\vec{r} = \vec{b} e^{-i\omega t}$ , que conduz a

$$(4.6) \quad \vec{r} = -\frac{e\vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

O dipolo oscilante correspondente a este deslocamento forçado  $\vec{r}$  — dipolo induzido — é  $\vec{p} = -e\vec{r}$ , o que significa que cada electrão da molécula contribui para a polarização com um momento  $\vec{p} = -e\vec{r}$ .

Admitindo além disso, por razões de simplicidade — mas o tratamento poderia ser generalizado — que há somente um electrão efectivo, com frequência própria  $\omega_0$ , obtém-se para a polarizabilidade molecular

$$(4.7) \quad \vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}, \quad \text{o valor}$$

$$\alpha(\omega) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Ora é óbvio que de uma polarizabilidade molecular dependente da frequência do campo instalado,  $\alpha(\omega)$ , decorre uma susceptibilidade eléctrica (grandeza definida já para um elemento de volume com um número  $N$  de moléculas) igualmente dependente da frequência  $\omega$  e daí um poder indutor específico  $\underline{\epsilon}$  dependente de  $\omega$ . [ A fórmula de LORENTZ-LORENZ liga directamente  $\underline{\alpha}$  a  $\underline{\epsilon}$  :

$$(4.8) \quad \alpha = \frac{3}{4\pi N} \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon + 2\epsilon_0} \quad (*) ]$$

Em especial para os gases,  $\epsilon$  é muito próximo de  $\epsilon_0$  e a fórmula (4.8) simplifica-se para dar

$$(4.9) \quad \epsilon(\omega) = \epsilon_0 \left( 1 + \frac{4\pi N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \right)$$

As situações de ressonância ( $\omega = \omega_0$ , frequência própria), com valor infinito de  $\alpha(\omega)$  em (4.7), são de facto evitadas quando se considera na equação do movimento (4.5) um termo suplementar correspondente a um efeito de amortecimento,  $-g\dot{\vec{r}}$  :

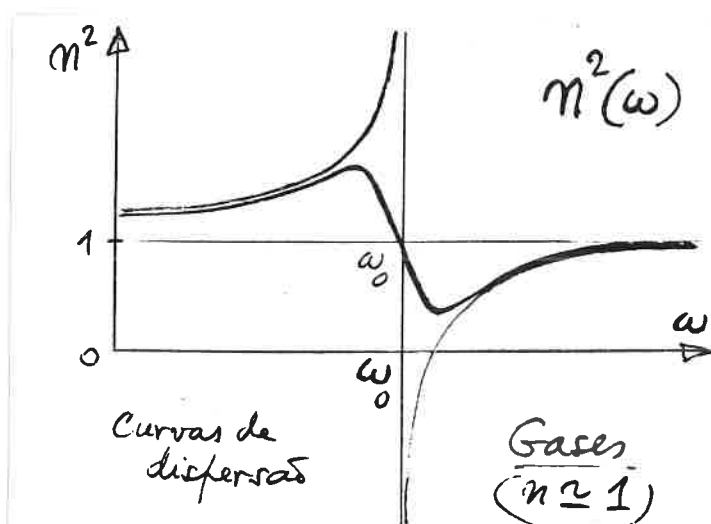
$$(4.10) \quad m\ddot{\vec{r}} + g\dot{\vec{r}} + k\vec{r} = -e\vec{E}$$

conduzindo a uma solução forçada

$$(4.11) \quad \vec{r} = \frac{-e\vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega g} ;$$

(\*) Cf. BORN & WOLF, Principles of Optics, 4<sup>th</sup> ed. (1970), p. 87.

A polarizabilidade  $\alpha(\omega)$  torna-se assim uma quantidade complexa cujo módulo desempenha no entanto o papel de polarizabilidade efectiva, ao mesmo tempo que um pequeno factor de atenuação (muito fraco) intervém sobre a amplitude do dipolo induzido. A expressão de  $\epsilon(\omega)$  virá modificada em conformidade com esta modificação de  $\alpha(\omega)$ . O efeito de tal modificação traduz-se na figura abaixo em que a curva de dispersão de um gás é representada mediante a utilização da função  $n^2(\omega)$  — sendo  $n$  o índice de refração do meio relativamente ao vácuo — função esta directamente relacionada com  $\epsilon(\omega)$ , como se sabe, posto que se admite  $\mu \simeq \mu_0$ . Na figura, a curva mais a cheio é a que resulta de se ter já tomado em consideração o efeito de amortecimento; as outras curvas, a traço mais leve, com assíntotas verticais em  $\omega = \omega_0$  representam directamente uma fórmula do tipo (4.9) para  $\epsilon(\omega)$ . A dispersão diz-se normal se  $\frac{dn}{d\omega} > 0$  e anómala se  $\frac{dn}{d\omega} < 0$ . A curva



da figura ao lado revela que na região em torno da frequência de ressonância (ou frequência própria) se tem dispersão anómala e nas outras regiões, a dispersão é normal.

## § 4.4 — Grupos de ondas. Velocidade de grupo.

Recorde-se que, sendo o vector de Poynting, pela sua intervenção na equação de balanço energético, o vector de transporte da energia electromagnética, resulta que a sua expressão específica no caso das ondas planas confere à velocidade de propagação de tais ondas o importante papel de velocidade de transporte da energia. Vimos, porém, que na sobreposição de ondas planas monocromáticas adoptada para descrever um impulso electromagnético, a velocidade de propagação de cada componente, excepto feita de propagação no vácuo, perde sentido como propriedade global do impulso electromagnético. Surge portanto o problema de saber se se pode encontrar alguma grandeza capaz de representar a velocidade de transporte da energia electromagnética de um trem de ondas ao longo de um eixo como o de (4.3).

O caso geral de um meio altamente dispersivo, ou o de trem de ondas muito curto, com um grande espaçamento de números de onda presentes no seu desenvolvimento de Fourier — são casos difíceis de tratar.

Tem todavia um grande interesse físico e é susceptível de um tratamento matemático acessível, o caso muito mais simples em que se cumprem as duas seguintes condições que têm de restar uma intervenção conjugada (interdependente):

(I). As densidades de amplitude  $A(k)$  na expressão do impulso  $\psi(z, t)$  só assumem valores apreciáveis num intervalo  $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ , em torno de  $k_0$ , de extensão muito menor que o próprio valor  $k_0$ :

$$(4.12) \quad \Delta k \ll k_0$$

(II). A dispersão do meio é um fenómeno relativamente moderado na região em torno de  $k_0$ , mais precisamente, a função  $\omega(k)$  é uma função lentamente variável no intervalo  $(k_0 - \Delta k, k_0 + \Delta k)$ .

Sob estas condições, dizemos estar na presença de um grupo de ondas, centrado em  $(\omega_0, k_0)$ .

Com a condição (I), (4.3) reduz-se a

$$(4.13) \quad \psi(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i[kz - \omega(k)t]} dk$$

Com a condição (II) o desenvolvimento de Taylor de  $\omega(k)$  em torno de  $k_0$  restringe-se aos dois primeiros termos (num intervalo sob a condição (4.12)):

$$(4.14) \quad \omega(k) = \omega(k_0) + (k - k_0) \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}$$

Então, com um artifício evidente,

$$(4.15) \quad kz - \omega(k)t \cong k_0 z - \omega_0 t + (k - k_0) \left[ z - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]$$

sendo  $\omega_0 = \omega(k_0)$  e  $\left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 = \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_{k=k_0}$ .

Introduzindo (4.15) em (4.13),  $\psi(z, t)$  pode escrever-se:

$$(4.16) \quad \psi(z, t) = A(z, t) e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$$

com

$$(4.17) \quad A(z, t) = \int_{k_0 - \Delta k}^{k_0 + \Delta k} A(k) e^{i(k - k_0) \left[ z - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]} dk$$

Na expressão (4.16), fica em evidência, por um lado, o factor de fase da onda plana monocromática que constitui a componente central do grupo de ondas, de frequência  $\omega_0$ . Trata-se portanto de um factor cuja rapidez de variação no tempo é determinada pela harmónica de frequência  $\omega_0$  e cuja rapidez de variação no espaço é determinada pela harmónica de frequência  $k_0$ . Por outro lado, verifica-se que o factor  $A(z, t)$ , dado por (4.17), é uma função lentamente variável de  $z$  e de  $t$  — em face do outro factor  $e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$  — visto que a dependência em  $z$  é traduzida por harmónicas cujas frequências  $k - k_0$  são, pela condição (4.12), muito menores que  $k_0$  e a dependência em  $t$  é traduzida por harmónicas de frequências

$$\left| (k - k_0) \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 \right| = |\omega - \omega_0| \ll \omega_0$$

dado que pela condição (II),  $\omega(k)$  é uma função lentamente variável de  $k$ .

Assim,  $\psi(z, t)$  pode ver-se como se se tratasse



de uma onda monocromática de frequência  $\omega_0$ , submetida a uma modulação lentamente variável, no espaço e no tempo, da sua amplitude. O grupo de ondas  $\psi(z, t)$ , caracterizado pelas condições (I) e (II), descreve-se pois como uma onda quasi-monocromática cujo "factor de fase" é  $e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$  e cuja "amplitude" é  $A(z, t)$ . Daqui o adjetivo quasi-monocromático que muitas vezes acompanha a designação grupo de ondas.

A função  $A(z, t)$  tem uma estrutura analítica visivelmente complexa; todavia é óbvio que a associação espaço-temporal  $\left[ z - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]$ , porque  $\left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0$  é uma constante, se comporta como um parâmetro único no processo de integração; e nestas condições pode assegurar-se que

$$(4.18) \quad A(z, t) = F \left[ z - \left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0 t \right]$$

Mas esta expressão põe claramente em evidência que a amplitude  $A(z, t)$  do grupo de ondas se comporta como uma onda que se propaga ao longo do eixo dos  $z$ , com uma velocidade de propagação  $\left( \frac{d\omega}{dk} \right)_0$ . [Rever a este propósito

o § 1. da 3ª Parte do Cap V]. Assim na expressão de  $\psi(z, t)$  figura além da velocidade de fase  $\omega_0/k_0 = a(\omega_0)$  no factor  $e^{i(k_0 z - \omega_0 t)}$ ,

também a velocidade de propagação da função amplitude  $A(z, t)$ , i.e.,  $\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0$  que se designa por velocidade de grupo do grupo de ondas em causa.

Se a dispersão do meio é moderada, como vimos supondo, um impulso electromagnético representável como grupo de ondas pode propagar-se a grandes distâncias sem difusão apreciável, propagando-se a sua "amplitude" com a velocidade  $\left(\frac{d\omega}{dk}\right)_0$ . Estando a densidade de energia associada à amplitude da onda (ao quadrado do seu valor absoluto), é claro que, dentro desta aproximação, o transporte da energia se executa com a velocidade de grupo. Mais uma vez, uma tal interpretação funda-se na concepção de Maxwell em que se admite que a energia se localiza na região ocupada pelo campo. Ora, a função "amplitude"  $A(z, t)$  representa obviamente a delimitação espaço-temporal da região ocupada pelo campo.

Isto, contudo, não pode ser tido como geralmente válido. Em particular, em regiões de dispersão anómala, a velocidade de grupo pode exceder a velocidade da luz no vácuo ou tornar-se negativa, e em tais casos, a velocidade de grupo perde todo o seu sentido físico. Deve então dar lugar, como se mostra, a um outro conceito — o de velocidade de sinal que representa efectivamente, em tais casos, a velocidade de transporte de energia. [ STRATTON ].

## CAPÍTULO V

### CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

#### 4ª PARTE

#### ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

#### NOS MEIOS CONDUTORES

Págs 284 a 300

Cap. V  
4ª Parte

— ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS  
NOS MEIOS CONDUTORES

1. Introdução

Temos estudado até aqui a propagação das ondas electromagnéticas apenas em meios transparentes, nos quais, em princípio (supostas permanentes as fontes que produzem o campo), um observador, onde quer que se situe, detecta a mesma intensidade da onda (segundo a orientação de propagação e em valor médio no seu tempo de medida, bem entendido). Diz-se que um meio é electromagneticamente absorvente quando nele se manifesta um enfraquecimento da onda — detectado ou medido na sua amplitude ou na sua energia média — enfraquecimento tanto maior quanto maior for o caminho percorrido pelo observador no sentido da propagação.

Do ponto de vista electromagnético, devem ser absorventes, em primeira análise, os meios dotados de condutividade eléctrica,  $\sigma$ , porque, obviamente, a existência do campo eléctrico  $\vec{E}$  da onda, logo aí faz surgir corrente eléctrica de densidade volumica  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ , responsável por libertação de calor de Joule, fenómeno irreversível que se traduz por uma dissipação de energia electromagnética, perdida pela onda e absorvida no meio (sob a forma de calor). Em consequência desta dissipação de energia a amplitude da onda electromagnética num condutor é, certamente, gradualmente

atenuada à medida que a onda progride no meio. Nos metais, que são os mais típicos meios condutores, o efeito de atenuação das ondas electromagnéticas, por causa da sua alta condutividade, é tão grande que eles se tornam praticamente opacos. Apesar disso, os metais desempenham um papel importante na Óptica Electromagnética: (i) a absorção forte é acompanhada de alta reflectividade, de tal modo que as superfícies metálicas (polidas) actuam como excelentes espelhos; (ii) por causa da penetração parcial da onda dentro de um metal torna-se possível obter informações acerca das constantes de absorção e do mecanismo de absorção, a partir das observações da onda reflectida, apesar de ser pequena a profundidade de penetração.

A interpretação deste fenómeno de absorção por condutividade, bem como o seu tratamento quantitativo faz-se sem grandes dificuldades mediante a descrição macroscópica do campo electromagnético — e esse é o objectivo do presente capítulo.

Mas convém salientar desde logo a existência de outras espécies de absorção que se manifestam, com maior ou menor predominância, em diversos meios, em variados estados físicos, por interacção com campos electromagnéticos de toda a vasta gama de frequências. Um caso típico é o da absorção por ressonância que se processa quando a onda electromagnética se propaga através

de vidros fumados ou através de chamas. Mas há também a absorção de radiações visíveis e ultravioletas por interacção das radiações electromagnéticas com os movimentos electrónicos das camadas periféricas dos átomos; a absorção dos raios X por interacção com os movimentos electrónicos das camadas mais profundas dos átomos; a absorção das radiações infravermelhas por interacção com os movimentos de vibração dos núcleos nas moléculas; a absorção de microondas por interacção com movimentos rotacionais das moléculas; etc..

Tais interacções, na maior parte dos casos não directamente dissipativas, provocam modificações substanciais do estado de movimento das partículas constituintes dos sistemas microfísicos; produzem-se assim consideráveis transferências de energia do campo electromagnético interveniente para os sistemas microfísicos — e isso determina uma forte absorção da onda incidente. O tratamento quantitativo destes processos exige, obviamente, o recurso aos métodos da Física Quântica e não é, aliás, isento de dificuldades de monta; mas, de qualquer modo, está fora do alcance do nosso curso.

Note-se ainda que os meios reais podem manifestar uma sobreposição dos efeitos de absorção por condutividade e de absorção por ressonância ou de outra espécie; o efeito predominante depende em geral do domínio de frequências da onda electromagnética incidente.

## 2. Equações básicas

Para o nosso estudo da absorção por condutividade admitiremos que numa vasta região do espaço, preenchida por um meio condutor, isótropo (\*), homogéneo, sem histerese e de comportamento linear nas suas propriedades eléctricas e magnéticas, se detectam os efeitos de um campo electromagnético originariamente produzido por fontes totalmente exteriores à região de observação. Antes de mais, devemos escrever

$$(1) \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{e} \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

com  $\epsilon, \mu$  escalares, positivos, uniformes (nas variáveis de um ponto do meio para outro). No tocante à condutância do meio, admitiremos a validade da lei de Ohm, atribuindo-lhe ainda propriedades de isotropia e homogeneidade; escrevemos portanto

$$(2) \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}$$

com  $\sigma$  escalar, positivo e uniforme (v. acima). Faremos notar que esta densidade de corrente  $\vec{J}$ , assim gerada pela presença do campo, é uma fonte inerente ao próprio meio, forçosamente existente no interior (em cada ponto) da região de observação.

Nestas condições, e partindo das eqs (V.2-6) do Cap. V, as equações de Maxwell escrevem-se

$$(3) \quad \begin{cases} \text{rot } \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} & ; \quad \text{div } \vec{E} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} (\sigma \vec{E} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) & ; \quad \text{div } \vec{H} = 0 \end{cases}$$

(\*) V. Nota na página seguinte.

com as três constantes características do meio,  $\underline{\epsilon}$ ,  $\underline{\mu}$  e  $\underline{\sigma}$ , em evidência (constante dielétrica, permeabilidade magnética e condutividade). A partir destas eq.<sup>s</sup> (3), e por um procedimento análogo ao seguido no § V.3.1.1 do Cap V, é ainda possível separar os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , passando a equações diferenciais de 2.<sup>a</sup> ordem, uma em  $\vec{E}$ , outra em  $\vec{H}$ , formalmente idênticas entre si; de tal modo que se escreve uma única equação válida para qualquer uma das seis componentes cartesianas  $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$ , genericamente designadas por  $\psi$ :

$$(4) \quad \text{lap} \psi - \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\sigma \mu}{c^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

(\*) (Nota à página precedente)

Já dissemos que os metais são os mais típicos meios condutores. Deve observar-se que todo o pedaço de um metal, macroscópico, é um complexo agregado cristalino, consistindo de um grande número de pequenos cristais com uma distribuição aleatória das orientações dos seus eixos principais. Monocristais de tamanho apreciável são raros, mas podem ser produzidos artificialmente; o seu estudo faz-se na Óptica dos Cristais (Óptica Eletromagnética dos Meios Anisotrópicos). Todavia, uma mistura de um grande número de cristalitos orientados aleatoriamente vai comportar-se, evidentemente, à escala macroscópica, como uma substância isotrópica, cujo estudo é muito mais simples.



Esta é a nova "equação de onda" que substitui (V.3-7) do Cap V. Ao termo de condutividade  $\frac{1}{c} \sigma \vec{E}$  nas eqs. (3) corresponde na eq. (4) o aparecimento do termo suplementar  $-\sigma \mu / c^2 \partial \mathcal{V} / \partial t$ , directamente dependente da condutividade.

### 3. A equação de dispersão das cargas eléctricas e a componente longitudinal do campo eléctrico.

Recordemos que no § III.6 do Cap. III foi feita a análise da dispersão das cargas num condutor isotrópico, homogéneo, linear. Concluímos que ela se processa segundo a lei

$$(III-13) \quad \rho = \rho_0 e^{-t/\mathcal{Q}} \quad \text{com } \mathcal{Q} = \frac{\epsilon}{\sigma}$$

Uma vez que  $\mathcal{Q}$ , tempo de relaxação, é para os bons condutores um tempo extremamente curto, isto significa que qualquer distribuição volumétrica de carga atribuída num dado instante ao condutor,  $\rho_0$ , se reduz a zero quase instantaneamente.

Tem interesse verificar agora que uma lei semelhante vale para a componente longitudinal do campo eléctrico, no caso em que os campos, além de variarem no tempo, têm variações espacial mas apenas ao longo de uma orientação  $\vec{s}$ , dependendo portanto exclusivamente de  $t$  e da variável espacial  $\xi = \vec{r} \cdot \vec{s}$  ( $\vec{r} \equiv \vec{OP}$ ):

$$(5) \quad \vec{E}(P, t) = \vec{E}(\xi, t) \quad ; \quad \vec{H}(P, t) = \vec{H}(\xi, t) .$$

Por componente longitudinal do campo  $\vec{E}$  (do campo  $\vec{H}$ ) entende-se então, respectivamente:

$$(6) \quad E_{\text{long}} = \vec{s} \cdot \vec{E} \quad H_{\text{long}} = \vec{s} \cdot \vec{H}$$

Ora, atendendo a que o operador fundamental das variações espaciais  $\vec{\nabla}$  se exprime nesse caso meramente por  $\vec{\nabla} \equiv \vec{\nabla}_{\vec{\xi}} \frac{\partial}{\partial \xi} = \vec{s} \frac{\partial}{\partial \xi}$ ,

resulta das eqs (3), após conveniente manipulação matemática, que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \implies (7a) \quad \frac{\partial H_{\text{long}}}{\partial \xi} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} + \frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0 \implies (7b) \quad \frac{\partial H_{\text{long}}}{\partial t} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \implies (7c) \quad \frac{\partial E_{\text{long}}}{\partial \xi} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \frac{\epsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{\sigma}{c} \vec{E} = 0 \implies$$

$$\implies (7d) \quad \frac{\partial E_{\text{long}}}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} E_{\text{long}} = 0$$

Assim, por um lado, as eqs (7a) e (7b) provam que a única possível componente longitudinal de  $\vec{H}$  é um campo uniforme e estático (situação idêntica à de um meio não-condutor). Por outro lado, a eq. (7c) mostra que a única possível componente longitudinal de  $\vec{E}$  é uniforme no espaço, enquanto a eq. (7d) revela que tal componente

tem uma lei de variação no tempo formalmente idêntica à lei de dispersão das cargas (III-13), i.e.

$$(8) \quad E_{\text{long}} = E_0 e^{-t/\theta}$$

(Para atestar isso, confronte-se a eq. (7d) com a eq. (III-12) do Cap V.) Consequentemente, num condutor razoavelmente bom, nenhuma componente longitudinal de  $\vec{E}$  pode subsistir, elasticamente; se alguma perturbação desse tipo se estabelece num dado instante, ela reduz-se a zero num tempo extremamente curto (com a mesma taxa de relaxação  $\theta$  que a da dispersão das cargas). Suporemos daqui em diante sempre desprezável  $E_{\text{long}}$ .

#### 4. Campo electromagnético harmónico no tempo. "Constante dieléctrica" complexa.

Estudemos agora, em particular, um campo electromagnético harmónico no tempo, de frequência  $\omega$ , a que pode dar-se a representação complexa

$$(9) \quad \vec{E} = \vec{E}_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} \quad (\text{e análogamente para } \vec{H})$$

Isto equivale, como se sabe, a estudar a componente genérica do desenvolvimento de Fourier de um campo cuja variação no tempo é regida por alguma determinada lei, dentro de uma grande generalidade. (São com efeito muito poucas restritivas, para as grandezas físicas habituais, as condições matemáticas a que devem satisfazer as funções susceptíveis de

um desenvolvimento de Fourier). Ora (9) implica

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -i\omega \vec{E} \quad \text{ou seja} \quad \vec{E} = \frac{i}{\omega} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

É portanto possível re-escrever a 2ª equação de evolução em (3) sob a forma

$$(10) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \left( \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega} \right) \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \epsilon' \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

com

$$(11) \quad \epsilon' = \epsilon + i \frac{\sigma}{\omega}.$$

Isso significa que a introdução de uma "constante dielétrica" complexa  $\epsilon'$ , dada por (11), reduz as eqs de Maxwell (3), válidas para os meios condutores, a uma escrita formalmente idêntica à das eqs de Maxwell válidas nos meios não-condutores (Cf. Cap V, eqs (V.3-4)). Note-se que o mesmo se passa ao nível da equação de onda (4). Com  $\psi = \psi_0 e^{-i\omega t}$ , tem-se  $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega \psi$

e então 
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -i\omega \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{i}{\omega} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2};$$

donde resulta que (4) se pode re-escrever como:

$$(12) \quad \text{lap } \psi - \frac{\epsilon' \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$$

sendo  $\epsilon'$  dada por (11).

Fica assim claro que a existência de condutividade  $\sigma$  num meio pode ser tomada em conta no formalismo que descreve o campo electromagnético

neste meio, pela simples introdução desta "constante dielétrica" complexa, tornando-se assim viável realizar uma transposição do tratamento seguido para o caso dos meios isolantes:

1.º) na busca de soluções da equação de propagação dos campos (equação de onda) (4), re-escrita sob a forma (12);

2.º) no estabelecimento, para as soluções encontradas, das condições impostas pelas equações de Maxwell (3) re-escritas sob a forma em que a 2.ª eq. de evolução é substituída pela eq. (10).

## 5. Ondas electromagnéticas planas monocromáticas nos meios condutores.

A eq. (12) admite obviamente como solução matemática uma função do tipo onda plana monocromática, de frequência  $\omega$ , que pode encarar-se como resultante de uma concretização da parte espacial de (9) tal que:

$$(13) \quad \psi = \psi_0(\vec{r}) e^{-i\omega t} = A_0 e^{i(\underline{k}' \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Aqui,  $A_0$  é uma amplitude constante e  $\underline{k}'$  é um "número de onda" complexo que corresponde à "constante dielétrica" complexa  $\underline{\epsilon}'$  (Recorde-se que nos meios isolantes  $k = \frac{\omega}{a} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon \mu}$ ; assim, um  $\underline{\epsilon}'$  complexo origina naturalmente um  $\underline{k}'$  complexo). A substituição de (13)

na eq. (12) fornece a condição a que deve satisfazer  $\underline{k}'$ :

$$(14) \quad k'^2 = \epsilon \mu \frac{\omega^2}{c^2} \left( 1 + i \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)$$

As soluções possíveis acham-se pela identificação trivial (com  $\underline{\alpha}$  e  $\underline{\beta}$  reais):

$$(15) \quad \underline{k}' = \underline{\alpha} + i \underline{\beta}$$

Resulta daí (postas de lado as soluções matemáticas estranhas):

$$(16) \quad \left. \begin{array}{l} \alpha \\ \beta \end{array} \right\} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{2}} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \left[ \sqrt{1 + \left( \frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} \pm 1 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Procuramos agora saber qual o significado real da solução (13), qual a configuração efectiva do campo electromagnético. Introduzindo (15), vem

$$(17) \quad \Psi = A_0 e^{-\beta \vec{r} \cdot \vec{s}} e^{i(\alpha \vec{r} \cdot \vec{s} - \omega t)}$$

Põe-se assim em flagrante a existência de um factor de fase  $e^{i(\alpha \vec{r} \cdot \vec{s} - \omega t)}$  típico de uma autêntica onda plana monocromática com um número de onda real  $\underline{\alpha}$ ; e por outro lado a existência de uma "amplitude"  $A_0 e^{-\beta \vec{r} \cdot \vec{s}}$ , com variação espacial segundo  $\vec{s}$  e, porque  $\beta > 0$ , exponencialmente decrescente para zero. Trata-se portanto de um campo electromagnético organizado em onda plana monocromática mas, com uma amplitude que se atenua exponencialmente para zero, com um factor de extinção  $\underline{\beta}$ , à medida que o

observador progride no meio. (Note-se que estes resultados são perfeitamente consistentes com os dos meios isolantes, que daqui se podem obter quando se faz  $\sigma=0$  :  $\alpha_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon\mu}$  ;  $\beta_0 = 0 \Rightarrow k' \equiv k$  e amplitude constante  $A_0$  ).

### 5.1 — Espessura de penetração

Visto que a densidade volúmica de energia eletromagnética é em média no tempo proporcional ao quadrado da amplitude do campo, segue-se que essa densidade energética  $\bar{w}$  decresce exponencialmente segundo a relação

$$(18) \quad \bar{w} = \bar{w}_0 e^{-2\beta \vec{r} \cdot \vec{s}} ;$$

esta relação fornece simultaneamente uma medida da energia absorvida pelo meio por efeito de Joule.

$\frac{2\beta}{(2\beta)^{-1}}$  é o coeficiente de absorção ; o seu inverso  $(2\beta)^{-1}$  que tem dimensões de um comprimento (por (18)), designa-se por espessura de penetração,

$d = (2\beta)^{-1}$ . (A espessura de penetração representa o percurso a efectuar pelo observador segundo a orientação da onda para detectar um decréscimo na densidade energética  $\bar{w}$  para  $1/e$  do seu valor à partida.) Esta grandeza é usualmente uma fracção muito pequena do c.d.o. da radiação, sobretudo para os bons condutores. A tabela da página seguinte dá a ordem de grandeza de  $d$  para o caso do cobre, em diversas regiões de c.d.o. da radiação.

Radiação	Ultra-violetas	Infra-vermelhas	Micro-ondas	Radio-eléctricas
c.d.o., $\lambda_0$	1000 Å	10 $\mu$	10 cm	1 Km
$d \simeq$	$10^{-7}$ cm	$10^{-6}$ cm	$10^{-4}$ cm	$10^{-2}$ cm

## 5.2 — Velocidade de propagação da onda

A velocidade (real) de propagação da onda é o quociente entre  $\underline{\omega}$  e o número de onda real  $\underline{\alpha}$ :  $a = \omega/\alpha$ . De (16), resulta:

$$(19) \quad a = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \left[ \frac{1}{2} \left( \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Fácilmente se conclui, de (19), que  $a < \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$  i.e., que a velocidade de propagação num meio condutor é inferior à que se verificaria num meio com as mesmas características  $\underline{\epsilon}$  e  $\underline{\mu}$  mas desprovido de condutividade (com  $\sigma = 0$ ).

Além disso,  $\underline{a}$  surge-nos em (19) como uma função explícita de  $\underline{\omega}$  (a velocidade de propagação nos condutores cresce com a frequência do campo).

Isto significa que o efeito dissipativo de Joule origina uma dispersão que se interpreta assim na própria descrição macroscópica, ao contrário das causas de dispersão ligadas às dependências  $\epsilon(\omega)$  e  $\sigma(\omega)$ , para as quais temos de recorrer a descrições microfísicas. Esta dispersão,  $a(\omega)$ ,



descrita explicitamente por (19), causa naturalmente deformações de um grupo de ondas com amplitude apreciável dentro de um intervalo  $\Delta\omega$  de frequências. É a chamada distorsão dissipativa de um sinal electromagnético não-monocromático (tais deformações podem ocorrer por exemplo em ondas rádio-eléctricas, em meios condutores).

### 5.3 — Condições impostas pelas equações de Maxwell a uma onda plana monocromática num condutor

Mediante uma transposição formal do tratamento dado às eq.<sup>s</sup> de Maxwell num meio isolante (Cf. § V.3.2.2. do Cap. V) para as eq.<sup>s</sup> (3) com a 2.<sup>a</sup> eq. de evolução re-escrita sob a forma (10) — e-se conduzido à transversalidade e à ortogonalidade dos campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , constituindo  $\vec{s}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ , por esta ordem, um triedro triortogonal directo; e, além disso, extrai-se a relação

$$(20) \quad \vec{H} = \frac{c}{\mu\omega} \kappa' \vec{s} \wedge \vec{E}$$

em que  $\kappa'$  é ainda o "número de onda" complexo (correspondente à presença de  $\epsilon'$  complexa na eq. (10)). Recordando que os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$  se podem pôr sob a forma (que resulta de (17)) :

$$(17') \quad (\vec{E}; \vec{H}) = (\vec{E}_0; \vec{H}_0) e^{-\beta \vec{r} \cdot \vec{s}} e^{i(\alpha \vec{r} \cdot \vec{s} - \omega t)},$$

a relação (20) torna-se imediatamente válida para as amplitudes  $\vec{E}_0$  e  $\vec{H}_0$  (em geral, complexas):

$$(21) \quad \vec{H}_0 = \frac{c}{\mu\omega} k' \vec{s} \wedge \vec{E}_0$$

Escrevendo, por outro lado, com base em (16) e (15)

$$(22) \quad \begin{cases} k' = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\phi} \\ \text{com } \phi = \frac{1}{2} \text{arc tg} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) \end{cases}$$

e combinando (21) com (22), resulta:

$$(23) \quad \begin{cases} \vec{H}_0 = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} e^{i\phi} \vec{s} \wedge \vec{E}_0 \\ \text{com } \phi = \frac{1}{2} \text{arc tg} \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right) \end{cases} ;$$

em particular, a relação entre os módulos das amplitudes  $\vec{E}_0$  e  $\vec{H}_0$  vem:

$$(24) \quad |\vec{H}_0| = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[ 1 + \left( \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2 \right]^{1/4} |\vec{E}_0|$$

Das fórmulas (23) e (24) extraem-se as seguintes conclusões: a) a condutividade do meio gera uma diferença de fase  $\phi = \frac{1}{2} \text{arc tg} (\sigma/\omega\epsilon)$  entre os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{H}$ ; b) a condutividade torna desiguais as densidades de energia eléctrica e magnética (iguais entre si nos meios não-condutores).

## 6. Discussão dos resultados obtidos

Na discussão dos resultados obtidos nos parágrafos precedentes, vamos considerar os seguintes dois casos limites: I)  $\sigma/\omega\epsilon \ll 1$ , preponderância

da corrente de deslocamento sobre a corrente de condução ; II)  $\sigma/\omega\epsilon \gg 1$ , preponderância da corrente de condução sobre a corrente de deslocamento.

No caso I, trata-se de um meio fracamente condutor, ou de um campo com frequências muito elevadas face ao inverso do tempo de relaxação  $\tau$  do meio (ex. radiações visíveis ou ultravioletas). Tem-se então, a partir de (15)

$$(25) \quad k' \simeq \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\omega}{c} + i \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\sigma}{2c}$$

donde resulta que  $\alpha$  e  $\beta$  neste caso praticamente independentes da frequência quer o factor de extinção,  $\beta$ , quer a velocidade de propagação  $a = \frac{\omega}{\alpha}$ . Por outro lado, o campo eléctrico tem módulo ainda quase tão importante como o do campo magnético; e os dois campos fazem uma pequena diferença de fase; a onda transporta densidades de energia eléctrica e magnética praticamente iguais.

No caso II, trata-se de um meio fortemente condutor, com um tempo de relaxação  $\tau$  suficientemente baixo para que o seu inverso seja superior mesmo a frequências muito elevadas. Tem-se então, a partir de (15)

$$(26) \quad k' \simeq (1+i) \frac{1}{c} \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$$

donde resulta que o factor de extinção,  $\beta$ , é dependente da frequência e a velocidade de fase,

$a = \omega/\alpha$  cresce com a frequência. Por outro lado, o módulo do campo magnético é agora muito maior que o do campo eléctrico e entre os dois campos há uma diferença de fase  $\phi \approx 45^\circ$ . A energia do campo é quase inteiramente de natureza magnética (para o cobre tem-se  $\overline{w}_e = 0,03\% \overline{w}_{total}$ ).

✱

### Referências bibliográficas :

1. M. BORN and E. WOLF, Principles of Optics, 4th ed., 1968 § 13.1.
2. R. BECKER, Théorie des électrons, 1938.
3. J. A. STRATTON, Electromagnetic Theory, 1941, § 5.2
4. J. D. JACKSON, Classical Electrodynamics, 1962, § 7.7, 1st ed.  
 ———, ———, 1974, 2nd ed.

## CAPÍTULO V

### CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

#### 5ª PARTE

#### REGIME QUASI-ESTACIONÁRIO

#### APLICAÇÃO AOS CIRCUITOS

#### R, L e R, L, C

Páginas 301 a 331

# CAPÍTULO V — CAMPO ELECTROMAGNÉTICO VARIÁVEL

## 5.ª PARTE — CIRCUITOS R, L E R, L, C EM REGIME QUASI-ESTACIONÁRIO

### V.5.1. — Aproximação do campo electromagnético quasi-estacionário.

Num grande número de problemas — designadamente no domínio das aplicações tecnológicas do Electromagnetismo — revela-se suficiente a aproximação que consiste em desprezar o atraso nos potenciais de Lorentz<sup>(\*)</sup>, o que permite simplificar de maneira muito sensível o formalismo de aplicação das equações fundamentais aos problemas em causa.

Recordemos que os potenciais de Lorentz (potenciais retardados), para corpos em repouso, se escrevem em geral:

$$(V.5-1) \quad \begin{cases} V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho^*(Q, t - \frac{r_{PQ}}{a_0})}{r_{PQ}} dv \\ \vec{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \frac{\vec{J}^*(Q, t - \frac{r_{PQ}}{a_0})}{r_{PQ}} dv \end{cases}$$

encontrando-se reunidas em  $\rho^*$  e  $\vec{J}^*$  as densidades de cargas e de correntes verdadeiras (que constituem as fontes "primárias" do campo) com as densidades de cargas e de correntes fictícias que surgem associadas à presença e/ou ao comportamento dos meios materiais em face do campo. Tenhamos presente que a constante  $a_0 (= c/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0})$ , que intervém na determinação do atraso dos potenciais retardados ( $r_{PQ}/a_0$ ), coincide com a velocidade de propagação das ondas electromagnéticas no vácuo, sendo da ordem de grandeza de  $3 \times 10^8$  metro/segundo.

(\*) Cf. Cap V, Apêndice II, § 3, eq. (12).

Suponhamos que todas as cargas e correntes do sistema em estudo (verdadeiras e fictícias) se contêm dentro de um domínio espacial  $\mathcal{D}$  limitado em todos os sentidos. Suponhamos, além disso, que as densidades totais  $\rho^*$  e  $\vec{J}^*$  nas sofrem suas variações insensíveis no intervalo de tempo que as ondas eletromagnéticas levam a percorrer a distância entre dois quaisquer pontos do domínio  $\mathcal{D}$ . Então deve ter-se:

$$(V.5-2) \quad \begin{cases} \rho^*(Q, t - \frac{r_{PQ}}{a_0}) \approx \rho^*(Q, t) \\ \vec{J}^*(Q, t - \frac{r_{PQ}}{a_0}) \approx \vec{J}^*(Q, t) \end{cases}$$

para quaisquer pontos  $P$  e  $Q$  dentro do domínio  $\mathcal{D}$ , em qualquer instante. Isto equivale a supor que todo o atraso  $r_{PQ}/a_0$ , dentro de  $\mathcal{D}$ , é sempre desprezável em face dos tempos característicos da evolução (no tempo) das grandezas determinantes do campo eletromagnético no sistema.

Nestas condições, podem calcular-se, sem se cometer erro sensível, os potenciais num ponto  $P$  do domínio  $\mathcal{D}$  e no instante  $t$ , atribuindo às densidades totais  $\rho^*$  e  $\vec{J}^*$  que figuram em (V.5-1) os valores aproximados (V.5-2), ou seja, os valores que elas têm nesse mesmo instante  $t$ . Os potenciais de Lorentz (retardados) reduzem-se então a potenciais instantâneos com a seguinte forma:

$$(V.5-3) \quad \begin{cases} V(P, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho^*(Q, t)}{r_{PQ}} d\mathcal{V} \\ \vec{A}(P, t) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{J}^*(Q, t)}{r_{PQ}} d\mathcal{V} \end{cases}$$

Estes potenciais instantâneos (V.5-3) variam obviamente no decurso

do tempo; mas, em cada instante, eles têm os valores que teriam, nos mesmos pontos do espaço, se o sistema electro- magnético se achasse num estado estacionário, conservando as densidades  $\rho^*$  e  $\vec{j}^*$ , indefinidamente (por todo o tempo), nos elementos de volume potenciante, os valores que aí possuem nesse instante (\*). Isto equivale a dizer que o campo electromagnético, variando no tempo, acompanha instantaneamente, em toda a extensão do domínio  $\mathcal{D}$ , as variações no tempo das cargas e das correntes.

Dai o nome de estado quasi-estacionário ou de regime quasi-estacionário, que se atribui a toda a situação de campo electromagnético tratado dentro desta aproximação.

[ Pode verificar-se que, recorrendo aos potenciais de Maxwell (estabelecidos sob a condição de "gauge"  $\text{div } \vec{A} = 0$ ), nós obteríamos o mesmo resultado para os potenciais aproximados (V.5-3) — agora, de raiz, instantâneos — desde que nos dispuséssemos a desprezar na corrente total  $\vec{C}$  o termo da corrente de deslocamento  $\frac{\partial}{\partial t} [\epsilon_0(\vec{E} - \vec{E}^a)]$ , que pode considerar-se o termo essencial da corrente de deslocamento.

Nesta perspectiva, estabelece-se um elo de ligação entre o desprezo do atraso dos potenciais de Lorentz e o desprezo da corrente de deslocamento essencial nos potenciais de Maxwell — como duas vias distintas, mas aparentemente equivalentes — de atingir a mesma aproximação.

(\*) Cf. Cap I, eq. (I-55-b), pág 52; e Cap IV, eq. (IV-19), pág 168



maçãs para os campos de regime quasi-estacionário.]

Para o cálculo dos campos, dentro desta aproximação, nós continuaremos sempre a utilizar as mesmas fórmulas de Maxwell que fornecem os campos a partir dos potenciais: (Cf. Cap V, Apêndice II, eqs (3) e (4))

$$(V.5-4) \quad \begin{cases} \vec{E} = -\text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{E}^a \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{cases}$$

e que garantem formalmente a conservação das equações homogêneas de Maxwell

$$(V.5-5) \quad \text{rot}(\vec{E} - \vec{E}^a) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \text{div } \vec{B} = 0 .$$

Mas, sendo os potenciais  $\vec{A}$  e  $V$ , dados por (V.5-3), potenciais aproximados, os campos  $\vec{E}$  e  $\vec{B}$ , dados por (V.5-4) vão ser naturalmente campos aproximados.

Os campos  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  vêm como sempre dados pelas eqs. constitutivas

$$(V.5-6) \quad \begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} = \vec{B}/\mu_0 - \vec{M} \end{cases} .$$

Não é, obviamente, de esperar que a substituição em (V.5-6) dos campos aproximados dados por (V.5-4), com base em (V.5-3) — conduza a campos  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  que ainda respeitem as eqs de Maxwell não-homogêneas

$$(V.5-7) \quad \text{rot } \vec{H} = \frac{1}{c} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \quad ; \quad \text{div } \vec{D} = \rho .$$

Conviria precisamente examinar em que medida estas equações de Maxwell deixam de ser respeitadas pelos campos de indução aproximados (V.5-6), pois isto

fornecer-nos-ia uma avaliação do grau da aproximação que é praticada mediante a utilização dos potenciais (V.5-3), obtidos por desprezo dos atrasos  $r_{PQ}/a_0$ . Mas não faremos aqui uma tal análise (Ver, por ex., a obra de M. JOUGUET, *Traité de Electricité Théorique*, Tome III, pag. 132, § 4.2).

### V.5.2 — Análise das condições da aproximação no caso dos fenómenos periódicos sinusoidais

No caso dos fenómenos periódicos sinusoidais no tempo (harmónicos, no tempo) pode dizer-se que um estado, ou situação, electromagnético/a, é susceptível de tratar-se como quasi-estacionário se todos os tempos de atraso,  $r_{PQ}/a_0$ , são pequenos diante do período  $T$  característico de tais fenómenos

$$(V.5-8a) \quad r_{PQ}/a_0 \ll T$$

o que redundará em exigir que as dimensões do sistema considerado — domínio  $\mathcal{D}$  — sejam pequenas face ao comprimento de onda das radiações electromagnéticas monocromáticas com a frequência correspondente ( $\omega = 2\pi/T$ ) e propagando-se no vácuo, i.e., face a  $\lambda_0 = a_0 T$ ; com efeito, de (V.5-8a), decorre:

$$(V.5-8b) \quad r_{PQ} \ll a_0 T = \lambda_0 .$$

Com a frequência industrial de 50 ciclos/segundo, a que corresponde um c.d.o.  $\lambda_0 \cong 6000$  km, a condição (8b) é sempre largamente satisfeita, como é óbvio; mas vê-se

que essa condição pode ainda ser garantida para muitas situações experimentais com utilizações de frequências muito mais elevadas (note-se que para frequências da ordem de 1 Megaciclo/segundo, vem  $\lambda_0 \cong 300 \text{ m}$ ). Decorre destas considerações a importância prática do regime quasi-estacionário cujas aplicações cobrem assim não somente toda a Electrotecnia habitual mas ainda uma grande parte da Radio-electricidade.

### V.5.3 — Equações de conservação da carga eléctrica em regime quasi-estacionário

Ainda que importantes propriedades do campo estacionário possam tomar-se como muito aproximadamente válidas no campo quasi-estacionário, sem dificuldades de maior, merece no entanto uma discussão especial a equações de conservação da carga eléctrica.

Em regime variável, de modo geral, tal equação escreve-se, como se sabe,

$$(V.5-9a) \quad \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

para todo o ponto interior a uma região de continuidade; e de modo especial, na fronteira de um condutor com o isolante que o envolve, tem-se

$$(V.5-9b) \quad \vec{J} \cdot \vec{n} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

Entretanto, em regime estacionário, essas equações simplificam-se respectivamente para

$$(V.5-10a) \quad \operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad e$$

$$(V.5-10b) \quad \vec{J} \cdot \vec{n} = 0$$

(Sabe-se bem que é nestas duas últimas eq<sup>s</sup>. que se fundamenta o facto de a corrente estacionária ter o mesmo valor em q.q. secções ao longo de um condutor, em q.q. circuitos.)

Ora, a análise referida no final do § V.5.1 não pode na verdade justificar que, de uma maneira geral e por toda a parte dentro do domínio  $\mathcal{D}$ , as eq<sup>s</sup>. (V.5-10) possam validamente substituir as eq<sup>s</sup>. (V.5-9) como sua conveniente aproximação dentro do regime quasi-estacionário. As eq<sup>s</sup> (V.5-9) subsistem, no âmbito da aproximação, de modo geral. Vamos procurar mostrar em que medida esta dificuldade pode ser torneada e com que importantes efeitos.

A. Começemos por recordar que, em regime estacionário, com condutores homogêneos, isotrópicos, lineares, (para fixar ideias) só à superfície dos condutores é que se localizam cargas (estáticas). Com efeito no interior desses condutores é  $\rho = 0$ . No regime variável, ainda é praticamente assim: no interior dos condutores temos  $\rho = \rho_0 e^{-t/\theta}$ , com um declínio sempre muito rápido de sorte que  $\rho \approx 0$  e daí resulta  $\partial\rho/\partial t \approx 0$ . Donde se pode afirmar que, de acordo com (V.5-9a)  $\text{div } \vec{j} \approx 0$ . Mas à superfície dos condutores, poderá verificar-se localizações de cargas (estáticas), embora com uma acumulação variável no tempo; donde resulta que nao pode garantir-se que seja  $\vec{j} \cdot \vec{n} \approx 0$ .

Assim, contrariamente àquilo que acontece em regime estacionário, há em regime variável linhas de

corrente que atingem as superfícies limítrofes dos condutores, visto que sobre estas superfícies  $\vec{j} \cdot \vec{n}$  não é nula; daí resulta que a superfície lateral de um condutor não constitui um tubo de corrente, e, em consequência, ao longo de um tal condutor, a intensidade da corrente, tem, em cada instante, um valor variável de uma secção para outra.

B. Examinemos, no entanto, a contribuição importante (e decisiva) que pode acarretar para esta discussão o efeito das capacidades dos condutores envolvidos no processo.

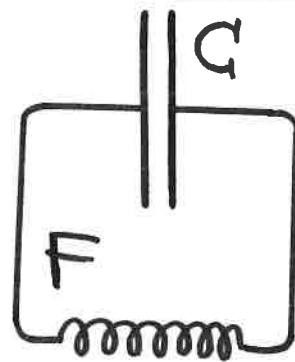
Notemos antes de mais que, em regime estacionário, as cargas (estáticas) localizadas à superfície são em geral de uma ordem de grandeza muito inferior à das cargas dinâmicas ( $P_m$ ). Isso deve-se, por um lado, a que as capacidades dos condutores (sobretudo as dos condutores filiformes) são geralmente fracas, de modo que bastam cargas extremamente pequenas para criarem campos apreciáveis e, por outro lado, deve-se a que as cargas susceptíveis de serem postas em movimento nos condutores sob a acção de um campo (electrões livres) existem em quantidades consideravelmente grandes.

Em regime variável, é ainda de admitir, pela mesma argumentação, que as cargas superficiais (estáticas), embora de acumulação variável no tempo, sejam ainda, em numerosos casos (enquanto não haja capacidades consideravelmente fortes), de uma ordem de grandeza muito inferior à das

cargas dinâmicas ( $P_m$ ). Quando isso assim é, e quando, além disso, se processam variações relativamente lentas (típicas do regime quasi-estacionário) — então, a componente  $\vec{J} \cdot \vec{n}$ , igual à taxa de variação no tempo das cargas superficiais, poderá considerar-se desprezável face à componente longitudinal de  $\vec{J}$  (ao longo do condutor), proporcional a  $P_m$ . É o que acontece nomeadamente para um condutor filiforme, quando percorrido por correntes de frequência não muito elevada: em todo o ponto interior deste fio,  $\text{div } \vec{J} \approx 0$ , como já vimos; e em todo o ponto da sua superfície limítrofe  $\vec{J} \cdot \vec{n} \approx 0$ , como acabámos de ver. Cumprem-se assim, neste caso concreto, muito aproximadamente as condições (V.5-10 a, b), donde resulta que, nestas circunstâncias, a corrente tem, em cada instante, uma intensidade praticamente constante,  $i(t)$ , ao longo de todo o fio, cuja superfície lateral se comporta como se fosse um tubo de linhas de força da densidade de corrente,  $\vec{J}$ .

Quando, porém, o sistema comporta capacidades consideravelmente fortes, i. e., quando os circuitos compreendem condensadores (e podemos esquematizar supondo que as capacidades consideravelmente fortes se situam apenas nos condensadores) — então, as cargas superficiais que se acumulam sobre as suas armaduras (com acumulação variável no tempo) já não são desprezáveis em face das cargas dinâmicas ( $P_m$ ); é preciso tê-las em conta. Seja, por exemplo, o sistema simples esquematizado na figura,

em que, vamos supor, se processa uma corrente alternada com frequência não muito elevada, estabelecida aí mediante a criação de certas condições iniciais. Os efeitos de capacidade do



fio  $F$  são desprezáveis: a corrente tem, em cada instante, a mesma intensidade  $i(t)$  ao longo de todo o fio, interrompendo-se no entanto entre as armaduras do condensador. (Cumprem-se assim para o fio  $F$  as condições (V.5 - 10 a, b), mas não para o condensador  $C$ ). São ainda desprezáveis as cargas repartidas sobre as superfícies exteriores das armaduras do condensador  $C$ ; mas sobre as suas superfícies internas existem a cada instante cargas cuja densidade não poderá ser desprezada, produzindo a sua variação no tempo,  $\partial\sigma/\partial t$ , uma apreciável componente normal de  $\vec{J}$  à superfície interna das armaduras. Cumpre-se aqui a condição  $\vec{J} \cdot \vec{n} = \partial\sigma/\partial t$ , ou seja a condição (V.5-9b) do campo variável. Podemos dizer mais: é mesmo porque as cargas se podem acumular em quantidades importantes sobre as armaduras do condensador (função primordial de  $C$ ), que circula uma corrente apreciável no fio; e a intensidade desta corrente é

$$(V.5-11) \quad i(t) = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S \frac{\partial\sigma}{\partial t} \, dS = \frac{d}{dt} q(t),$$

sendo  $S$  a superfície interna de uma das armaduras (+) e  $q(t)$  a carga global que sobre ela se acumula no instante  $t$ . O fio condutor constitui um tubo de linhas de força da

corrente que se espalha nas armaduras do condensador e termina sobre as faces internas destas duas armaduras que se enfrentam mutuamente.

### V.5.4 — Circuito R, L.

#### V.5.4.1 — Equações geral que rege o circuito.

Seja um circuito condutor, único, e para esquematizar, filiforme. Suponhamos que vale  $R$  a sua resistência total,  $L$  o coeficiente de self-indução (admitiremos que estas grandezas são independentes da frequência do campo produzido no circuito). Suponhamos ainda que se instala no circuito uma f.e.m.  $\mathcal{E}$ , que poderá ser uma função de tempo. Admitiremos que em todos os elementos do circuito se cumpre a lei de Ohm,  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ .

Para encontrar a equação geral que rege o circuito, consideremos as fórmulas de Maxwell que exprimem os campos à custa dos potenciais (quasi-estacionários)

$$(12) \quad \begin{cases} \vec{E} = \vec{E}^a - \text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{cases}$$

Façamos a hipótese de que a intensidade da corrente, variável com o tempo,  $i(t)$ , tem em cada instante o mesmo valor ao longo de todo o circuito, hipótese esta que já vimos como se enquadra na aproximação do campo electromagnético quasi-estacionário. Tomemos a circulação fechada, ao longo do circuito ( $[c]$ ), dos diversos termos da 1.ª eq.(12), suposto pré-fixado o tempo no instante (genérico)  $\underline{t}$ :



(a) Reproduzindo aqui uma demonstração feita no caso da corrente estacionária (cf § III.9.D) :

$$(13a) \quad \oint_{[c]} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{[c]} \frac{\vec{J}}{\sigma} \cdot d\vec{s} = i \oint_{[c]} \frac{ds}{\sigma \Sigma} = Ri$$

(b) Por extensão natural da definição de f.e.m. aplicada a cada  $\mathcal{E}^a$ , agora em geral função do tempo :

$$(13b) \quad \oint_{[c]} \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = \mathcal{E}^a$$

(c) Utilizando a 2ª eq. (12) e o teorema de Stokes; tendo em conta que os símbolos operatoriais  $\frac{d}{dt}$  e  $\oint_{[c]} \dots d\vec{s}$  comutam (para corpos em repouso); e relembrando que  $\frac{1}{c} \Phi = Li$ , sendo  $\Phi$  o fluxo do campo magnético  $\vec{B}$  produzido pela corrente  $i$  através do próprio circuito; tendo em conta tudo isto, vem sucessivamente :

$$(13c) \quad \oint_{[c]} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \oint_{[c]} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \\ = \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \int_{S[c]} \vec{B} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

Reunindo os resultados parciais (13a), (13b) e (13c), resulta :

$$(14) \quad Ri + L \frac{di}{dt} = \mathcal{E}^a$$

que é a equação geral que rege o circuito único (ohmico) em regime quasi-estacionário.

A integração desta equação conduz a uma solução matemática geral que pode pôr-se sob a forma :

$$(15) \quad i(t) = A e^{-t/\tau} + \mathcal{F}^a(t)$$

em que: (a)  $A e^{-t/\tau}$  (com  $\tau = L/R$  e  $A$  uma constante arbitrária) é, como é fácil de verificar, a solução matemática geral da eq. diferencial homogênea correspondente a (14) — i.e.,  $Ri + L di/dt = 0$ .

(b)  $\mathcal{F}^a(t)$  é uma solução particular da eq. dif. proposta (14), em geral uma função do tipo de função 2º membro,  $\mathcal{E}^a(t)$ .

Vamos considerar aqui dois casos particulares importantes na prática: o caso de ser  $\mathcal{E}^a = \text{const.}$  (em que tende a estabelecer-se no circuito uma corrente estacionária); e o caso de ser  $\mathcal{E}^a = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$  (em que tende a estabelecer-se no circuito uma corrente alternada sinusoidal).

#### V.5.4.2 — Caso $\mathcal{E}^a = \text{const}$

Neste caso, a solução particular  $\mathcal{F}^a(t)$  deve ser uma constante (para ser do tipo do 2º membro) e é fácil concluir que essa constante vale  $\mathcal{E}^a/R$  (por teste na eq. proposta). Então, vem:

$$(16) \quad i(t) = A e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{E}^a}{R}$$

O valor da constante arbitrária  $A$  fixa-se mediante o conhecimento da situação inicial do circuito (i.e., pela condição inicial  $i = i_0$ , para  $t = 0$ ).

A primeira situação de interesse é a de estabelecimento da f.e.m. ou estabelecimento de corrente:

$\mathcal{E}^a$  é instalada no instante  $t=0$ , donde  $i_0=0$ .

Então  $A = -\mathcal{E}^a/R$  e

$$(17) \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}^a}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

Ao fim de um tempo suficientemente longo, comparado com o tempo  $\tau = \frac{L}{R}$ , estabelece-se no circuito uma corrente estacionária de valor  $i(\infty) = \mathcal{E}^a/R$ .  $\tau$  designa-se por constante de tempo do circuito  $R, L$ .

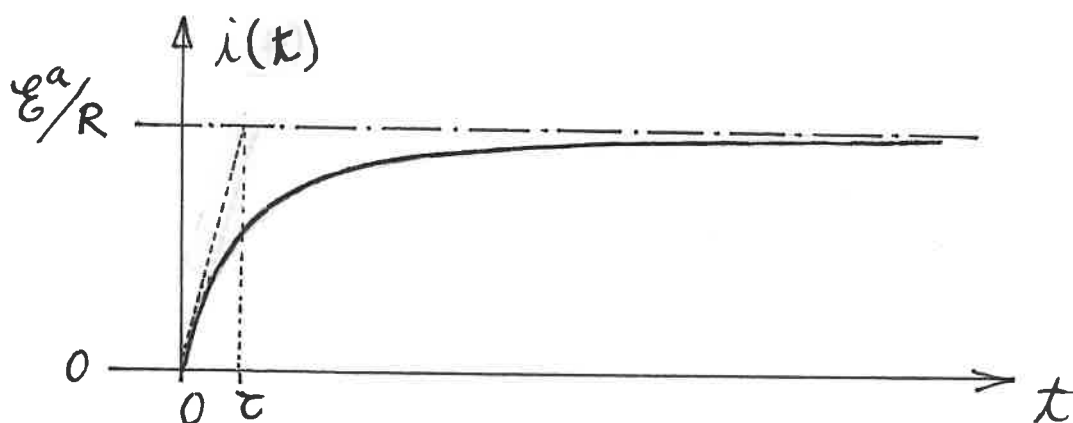


Figura 1

A segunda situação de interesse é a de ruptura da corrente, supondo que esta se achava já estabelecida no seu valor assintótico, i. e., com uma condição inicial  $i_0 = \mathcal{E}^a/R$  (para  $t=0$ ) e com  $\mathcal{E}^a = 0$  para  $t \geq 0$ . Então  $i(t)$  reduz-se à solução  $A e^{-t/\tau}$  e  $A = \mathcal{E}^a/R$ :

$$(18) \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}^a}{R} e^{-t/\tau}$$

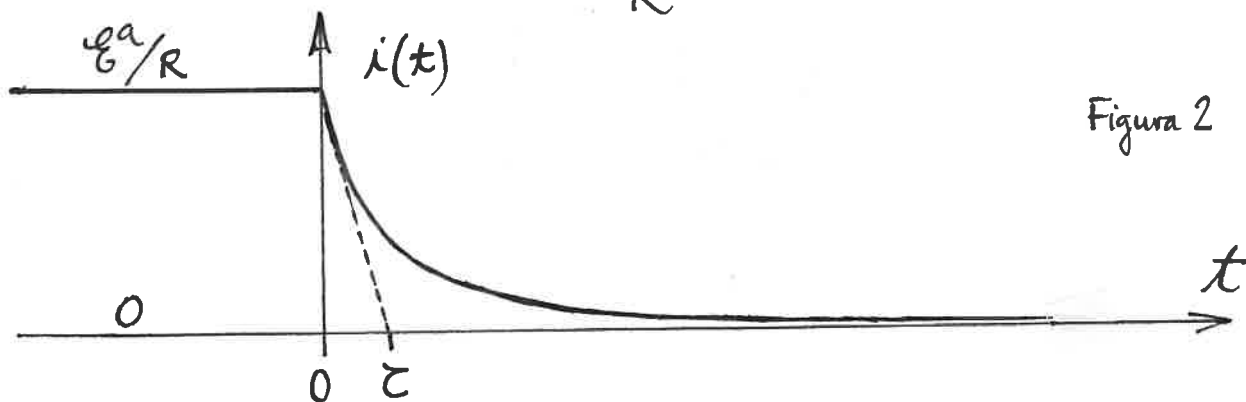


Figura 2

A constante de tempo  $\tau$  desempenha agora o papel de um tempo de relaxação: ao fim de um tempo suficientemente longo, comparado com  $\tau = \frac{L}{R}$ , a corrente anula-se,  $i(\infty) = 0$ .

Quanto maior for  $L$ , maior é  $\tau$  (para um mesmo valor de  $R$ ), portanto, mais lento é o estabelecimento da corrente, mais lenta é a ruptura da corrente. Se não houvesse self-indução, seria  $\tau = 0$ , e teríamos estabelecimento brusco, ruptura brusca. A existência de self-indução suaviza o estabelecimento (a ruptura) de uma corrente estacionária quando se introduz (se retira) bruscamente uma f.e.m. no circuito. Nas expressões (17) e (18) as correntes  $\pm \frac{\mathcal{E}^a}{R} e^{-t/\tau}$  representam as extracorrentes (de self-indução), respectivamente, de estabelecimento e de ruptura — esta última flagrantemente posta em evidência na Figura 2.

A equação que rege o circuito permite ainda analisar o balanço das trocas energéticas que acompanham o processo. Para fixar ideias, consideremos a situação de estabelecimento da corrente. Se multiplicarmos a eq. (14) por  $i$ , temos:

$$(19) \quad \mathcal{E}^a i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt}$$

Sendo  $Ri^2$  o calor de Joule libertado em todo o circuito por unidade de tempo; sendo  $\mathcal{E}^a i$  a potência fornecida pela fonte de f.e.m. (actividade dos campos

aplicados — Cf. § III. 9. E) ; sendo  $L i \frac{di}{dt} =$   
 $= \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} L i^2 \right)$  a variação da energia magnética do  
circuito por unidade de tempo ; e ainda por não  
haver outras energias postas em jogo — torna-se  
claro que a eq. (19) traduz o princípio de conser-  
vação da energia nas presentes circunstâncias. Com  
efeito, a energia fornecida em cada unidade de tempo  
pela fonte vai, por um lado, compensar o calor de Joule  
libertado e, por outro lado, produzir um acréscimo de  
energia magnética. A repartição deste fornecimento de  
energia é extremamente variável no decurso do tempo: (\*)  
nos primeiros instantes é  $i$  muito pequeno,  $\frac{di}{dt}$  é  
grande, há pouco calor de Joule libertado, quase toda  
a actividade dos campos aplicados vai para o aumento de  
energia magnética ; entretanto para  $t \gg \tau$ ,  $\frac{di}{dt}$   
é muito pequeno e  $i$  é grande, o acréscimo de  
energia magnética é praticamente nulo — toda a  
energia magnética foi já praticamente criada — e quase  
toda a actividade dos campos aplicados se dissipa em  
calor de Joule, aproximamo-nos assim das condições  
da corrente estacionária (recorde o que foi estabelecido no  
§ III. 9. E).

#### V.5.4.3 — Caso $\mathcal{E}^a = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$

No caso de a f. e. m. aplicada ser uma função do tempo

(\*) Para toda esta discussão tenha presente a Figura 1.

periódica sinusoidal (harmônica no tempo) de frequência angular  $\underline{\omega}$  (período  $T$ , frequência  $f$ ,  $\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$ ) do tipo

$$(20) \quad \mathcal{E}^a = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \quad \text{ou} \quad \mathcal{E}^a = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$$

revela-se muito cômodo e vantajoso utilizar a representação complexa

$$(21) \quad \mathcal{E}^a = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t} \quad (j = \sqrt{-1})$$

que associa matematicamente as duas funções (20) e permite tratá-las simultaneamente, em paralelo, sem qualquer interferência mútua, enquanto estas em jogo operações lineares — como já se tem feito uso em vários outros domínios dos nossos estudos. (É também conhecido o tratamento matemático a seguir para o cálculo de expressões quadráticas das grandezas que assim passamos à representação complexa.)

Na solução geral (15) da eq. diferencial (14), que rege o circuito, teremos desta vez uma função  $\mathcal{I}^a(t) = I_0 e^{j\omega t}$  (para ser do tipo da função (21) que se apresenta no 2.º membro de (14)); e a solução matemática completa é portanto:

$$(22) \quad i = A e^{-t/\tau} + I_0 e^{j\omega t}$$

Antes mesmo de precisar, por conveniente escolha ou determinação dos valores das constantes, a solução fisicamente adequada, podemos já adiantar algumas considerações úteis. Assim, de acordo com a análise feita no caso  $\mathcal{E}^a = \text{const}$ , o 1.º termo da corrente

(22) declina (mais ou menos rapidamente consoante o valor de  $\tau$ ) para zero — e constitui por isso um regime transitório; representa, por outro lado, a intensidade da corrente quando nenhuma f.e.m. aplicada está presente no circuito (ver Figura 2) — e constitui por isso um regime livre. Em oposição a estas características do 1.º termo, o 2.º termo de (22) vai traduzir-se por uma oscilação harmónica no tempo de frequência  $\omega$  e com uma determinada amplitude constante — constituindo por isso um regime permanente; representa por outro lado a intensidade da corrente com que o circuito responde à f.e.m. aplicada que lhe está imposta — e nesse sentido constitui um regime forçado.

Ao fim de um tempo suficientemente longo face a  $\tau$ , subsiste praticamente apenas o regime permanente ou forçado, de que passaremos a ocupar-nos muito especialmente, embora não deixemos de recorrer ao regime transitório ou livre para a resolução de certas questões. (A constante arbitrária  $A$  necessária para a definição precisa deste último regime, fixa-se, uma vez mais, pela condição inicial  $i = i_0$  para  $t = 0$ ).

A amplitude  $I_0$  do regime forçado determina-se pelo teste da função  $I_0 e^{j\omega t}$  como solução da eq. diferencial proposta (14). Vem:

$$RI_0 e^{j\omega t} + j\omega LI_0 e^{j\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t} \quad \left( \frac{di}{dt} = j\omega I_0 e^{j\omega t} \right)$$

e portanto:

$$(23) \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R + jL\omega} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$$

A grandeza complexa  $Z = R + jL\omega$  designa-se por impedância ou impedância complexa, compondo-se de duas partes: a parte real,  $R$ , resistência do circuito, designa-se por impedância ôhmica; a parte imaginária,  $jL\omega$ , designa-se por indutância. (Dá-se muitas vezes o nome de indutância a  $L\omega$ ).

Introduzindo (23) na expressão de  $i(t)$ , (22), — em que se considera já apenas o regime forçado — resulta

$$(24) \quad i = I_0 e^{j\omega t} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{j\omega t}}{Z} = \frac{\mathcal{E}^a}{Z}, \text{ ou:}$$

$$(24') \quad \boxed{\mathcal{E}^a = Z i}$$

A última equação pode encarar-se como uma nova forma de lei de Ohm para corrente alternada sinusoidal, na aproximação do campo quasi-estacionário, em regime forçado. Repare-se que, com a adopção da representação complexa (21) para as grandezas dependentes do tempo (como funções sinusoidais), se atingiu assim para o circuito único  $R, L$ , em regime variável, uma equação formalmente idêntica à lei de Ohm em regime estacionário,  $\mathcal{E} = Ri$  (com  $\mathcal{E}$  e  $i$ , reais), sendo que a resistência  $R$  deve substituir-se pela impedância complexa  $Z$ . Adiante tiraremos partido desta identidade formal, salvaguardadas as correspondências que nela são subentendidas, e aqui ficaram explicitadas.



Pode dar-se a  $Z$  a forma de Euler  $\rho e^{j\alpha}$ :

$$(25) \quad Z = R + jL\omega = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} e^{j\alpha} \quad \left( \operatorname{tg}\alpha = \frac{L\omega}{R} \right)$$

Então (24) re-escreve-se como:

$$(26) \quad i = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} e^{j(\omega t - \alpha)}$$

$\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$ , módulo da impedância complexa  $Z$ , também se designa muitas vezes simplesmente por impedância.  $\alpha = \operatorname{arctg}(L\omega/R)$  é a diferença de fase entre a corrente  $i(t)$  e a f.e.m. aplicada  $\mathcal{E}(t)$ .

[Note-se que, obtido o resultado (26) é tarefa simples retornar à função real  $i(t)$  correspondente à f.e.m. de que se parte (i.e. a uma ou outra das expressões (20)), pela operação  $\operatorname{Re}[\dots]$  para o 1.º caso, pela operação  $\operatorname{Parte Imag}[\dots]$  para o 2.º caso.]

Se se verifica a condição forte  $\omega L \ll R$ , então  $\sqrt{R^2 + (L\omega)^2} \simeq R$  e  $\alpha \simeq 0$ , de modo que, a partir de (26), vem  $i \simeq \frac{\mathcal{E}}{R}$ , como se estivéssemos, em cada instante, em regime estacionário, com a vulgar lei de Ohm. Note-se que a referida condição forte equivale a  $L/R \ll 1/\omega$  e pode ter portanto esta outra leitura  $\tau \ll T$ . Donde se conclui que o circuito em regime forçado é regido por uma lei de Ohm idêntica à do regime estacionário, desde que a constante do tempo do circuito

( $\tau = L/R$ ) seja muito menor que o período da f.e.m. harmônica que lhe é imposta.

#### V.5.4.4 — Valores energéticos médios em regime forçado com f.e.m. harmônica

A equação de balanço energético instantâneo, no caso geral, é formalmente idêntica à eq. (19) tomada agora a f.e.m.  $\mathcal{E}^a$  como variável no tempo. No caso específico de  $\mathcal{E}^a$  ser uma função harmônica no tempo, a corrente a introduzir é a da expressão geral (22), para a boa compreensão de todo o processo energético. Queremos com isto dizer que ao regime transitório cabe um papel essencial na interpretação do processo energético. Posto isto, quando desejamos ocupar-nos de um regime forçado já estabelecido, é em geral a valores energéticos médios sobre tempos de medida muito maiores que um período que devemos reportar-nos, dadas as limitações habituais dos aparelhos de medida.

Nessas condições, aplicando aqui o estudo geral conhecido respeitante a valores médios de expressões quadráticas de grandezas sinusoidais tratadas em representação complexa (Cf. Apêndice ao Cap. VIII), e partindo do resultado (26), para uma f.e.m. (21), obtemos sucessivamente:

(a) Valor médio do calor de Joule libertado por unidade de tempo em todo o circuito:

$$(27) \quad \overline{Ri^2} = \frac{1}{2} R i_0^2 \quad \text{e} \quad i_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}$$

(admitindo, por simplicidade, que  $\mathcal{E}_0$  é uma amplitude real, positiva)

(b) Valor médio do acréscimo de energia magnética por unidade de tempo, no circuito:

$$(28) \quad \overline{L i \frac{di}{dt}} = 0 \quad (i \text{ e } \frac{di}{dt} \text{ em quadratura})$$

(c) Valor médio da actividade dos campos aplicados (da potência fornecida pelo gerador de f.e.m.):

$$(29) \quad \overline{\mathcal{E}^a i} = \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 i_0 \cos \alpha$$

$$\left[ \overline{\mathcal{E}^a i} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathcal{E}^a i^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathcal{E}_0 i_0 e^{j\alpha} \} \right]$$

(d) Valor médio da energia magnética do circuito:

$$(30) \quad \overline{W_m} = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{4} L i_0^2$$

Cumpra-se, evidentemente, como equação de balanço energético médio:

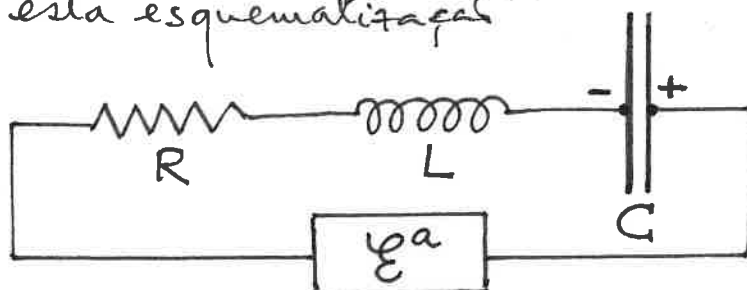
$$(31) \quad \overline{\mathcal{E}^a i} = \overline{Ri^2}$$

## V.5.5 — Circuito R, L, C

### V.5.5.1 — Equação geral que rege o circuito.

Para esquematizar, suporíamos agora tratar-se de um circuito com as características do circuito único R, L analisado nos §§ precedentes, mas no qual se intercala um condensador de capacidade  $G$ ,

o qual, vamos admitir, interrompe o circuito condutor no espaço entre as suas armaduras; suporemos ainda que a espessura do condensador é muito menor que as dimensões das armaduras e também muito menor que as dimensões do circuito. A figura abaixo procura traduzir esta esquematização



Continuaremos a supor que as grandezas  $R, L, C$  são independentes da frequência do campo produzido no circuito. Admitiremos que em todos os elementos do circuito se cumpre a lei de Ohm,  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  ( $\sigma = 0$ , no dieléctrico do condensador).

Para encontrar a equação geral que rege o circuito, consideramos de novo as fórmulas de Maxwell que exprimem os campos à custa dos potenciais (quasi-estacionários), i.e., as eq.<sup>s</sup> (12). Também aqui fazemos a hipótese de que a intensidade da corrente, variável com o tempo,  $i(t)$ , tem em cada instante o mesmo valor ao longo de todo o condutor, exceptuado todavia o espaço entre as armaduras do condensador, espaço em que  $i(t) = 0$ .

Podemos mostrar-se, como já dissemos, que esta hipótese — incluída a especificidade que se refere ao condensador — se enquadra dentro da aproximação do campo electromagnético quasi-estacionário. No âmbito da mesma

aproximação, mostra-se ainda, que, sendo o circuito fili-  
forme quase por toda a parte (excepto nas armaduras  
do condensador, esquematicamente) e com frequências  
do campo não muito elevadas; não há praticamente  
acumulação de cargas senão nas armaduras do conden-  
sador. Além disso, a carga, variável no tempo,  
armazenada na armadura positiva do condensador,  
 $q(t)$ , pode mostrar-se satisfazer a

$$(32) \quad i(t) = \frac{d}{dt} q(t) \quad \text{[cf. (V.5.11)]}$$

Para ter em conta esta acumulação de carga —  
— i.e., o efeito primordial do condensador no circuito —  
e para utilizar a importante relação (32), convém  
proceder a uma circulação da 1ª eq. (12) entre  
os pontos  $-$  e  $+$ , ao longo do circuito condutor, e  
suposto pré-fixado o tempo no instante (genérico)  $t$ :

$$\int_{-}^{+} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{-}^{+} \vec{E}^a \cdot d\vec{s} - \int_{-}^{+} \text{grad} V \cdot d\vec{s} - \int_{-}^{+} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$$

Os cálculos são aqui muito análogos aos do § V.5.4.1. O  
1º membro resulta  $Ri$ ; no 2º membro, o 1º termo  
fornece  $\mathcal{E}^a$ , o 2º termo dá origem a  $-(V_+ - V_-)$   
e o 3º termo, porque a circulação é quase fechada  
admite o cálculo aproximado

$$(33) \quad \int_{-}^{+} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{s} \approx \oint \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{c} \frac{d\Phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

(recorde-se o cálculo de (13c)). Mas, sendo  $q(t)$

a carga armazenada na armadura positiva do condensador, tem-se

$$(34) \quad V_+ - V_- = \frac{q(t)}{C}$$

Donde resulta :

$$(35) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C} = \mathcal{E}^a$$

que é uma das formas que pode assumir a equação geral que rege o circuito  $R, L, C$  em regime quasi-estacionário. Utilizando a eq. (32), pode escrever-se a eq. (35), tomando  $q(t)$  como função a conhecer :

$$(36) \quad \frac{q}{C} + R \frac{dq}{dt} + L \frac{d^2q}{dt^2} = \mathcal{E}^a ;$$

e tomando  $i(t)$  como função a conhecer, vem :

$$(37) \quad \frac{i}{C} + R \frac{di}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} = \frac{d\mathcal{E}^a}{dt}$$

Alternativamente às eq.<sup>s</sup> diferenciais (36) e (37), pode utilizar-se a equação integro-diferencial :

$$(38) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = \mathcal{E}^a$$

Trata-se, de qualquer modo, de uma equação de carácter linear (os coeficientes  $R, L$  e  $C$  são constantes), cuja resolução matemática é relativamente simples. A solução geral é, mais uma vez, a soma da solução geral da equação homogénea correspondente com uma solução particular da eq. proposta (em geral, do tipo da função 2.<sup>o</sup> membro). Análogamente ao que acontece com o

circuito  $R, L$ , também aqui são de considerar dois casos importantes na prática: o caso de ser  $\mathcal{E}^a = \text{const.}$  (que vai traduzir-se no processo de carga do condensador); e o caso de ser  $\mathcal{E}^a = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$  (em que tende a estabelecer-se no circuito uma corrente alternada sinusoidal).

Ocupar-nos-emos aqui apenas do 2.º caso, o mais importante do ponto de vista das aplicações. Há também neste 2.º caso lugar para distinguir dois regimes de características opostas: um regime livre, transitório (o que corresponde à solução geral da equação sem 2.º membro) e um regime forçado, permanente (o que corresponde à solução particular da equação proposta).

### V.5.5.2 — Regime forçado num circuito $R, L, C$

Admitamos desde logo  $\mathcal{E}^a$  na sua representação complexa

$$(21) \quad \mathcal{E}^a = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t}$$

e tomemos a eq. integro-diferencial (38) como ponto de partida:

$$(39) \quad Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t}$$

O regime forçado deve ser do tipo  $i = I_0 e^{j\omega t}$ , com uma amplitude  $I_0$  a ser encontrada por teste na eq. (39). Como  $di/dt = j\omega I_0 e^{j\omega t}$  e  $\int i dt = (j\omega)^{-1} I_0 e^{j\omega t}$ , a eq. (39) deverá:

$$\left[ R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right] I_0 e^{j\omega t} = \mathcal{E}_0 e^{j\omega t};$$

donde resulta:

$$(40) \quad I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}$$

A grandeza complexa  $Z = R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$  designa-se por impedância (complexa).

$R$ , parte real, é a resistência. A parte imaginária de  $Z$ ,  $j(L\omega - \frac{1}{C\omega})$  designa-se por reactância sendo  $jL\omega$  a indutância e  $-j\frac{1}{C\omega}$  a capacitância. Pode dar-se a  $Z$  a forma de Euler:

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} e^{j\varphi} \\ \text{com } \varphi = \arctg \left[ \frac{1}{R} (L\omega - \frac{1}{C\omega}) \right] \end{array} \right.$$

Então a corrente de regime forçado escrever-se-á:

$$(42) \quad i = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} e^{j(\omega t - \varphi)}$$

Note-se que  $i(t)$  pode também re-escrever-se de modo formalmente mais simples (utilizando (40)):

$$(43) \quad i = I_0 e^{j\omega t} = \frac{\mathcal{E}_0 e^{j\omega t}}{Z} = \frac{\mathcal{E}^a}{Z}, \text{ ou:}$$

$$(43') \quad \boxed{\mathcal{E}^a = Z i}$$

Esta redução formal é de todo semelhante à que já foi operada para o circuito  $R, L$  — eq. (24') — e podem reproduzir-se aqui "ipsis verbis" as considerações subsequentes à apresentação da eq. (24').



### V.5.5.3 — Ressonância em regime forçado

Se  $\mathcal{E}_0$  é uma amplitude real positiva, para fixar ideias, por razões de simplicidade, a expressão (42) de  $i(t)$  pode ler-se como evidenciando a amplitude  $i_0$  de  $i(t)$  e a sua diferença de fase  $\varphi$  para  $\mathcal{E}^a$ :

$$(44) \quad i = i_0 e^{j(\omega t - \varphi)} \quad , \text{ com:}$$

$$(44.a) \quad i_0(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}} \quad e$$

$$(44.b) \quad \varphi(\omega) = \arctg \left[ \frac{1}{R} \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) \right]$$

Vê-se imediatamente que  $i_0$  como função de  $\omega$  tem um máximo para

$$(45) \quad L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \quad .$$

Há pois uma frequência da f.e.m. imposta, para a qual o regime forçado responde com uma intensidade  $i(t)$  de amplitude  $i_0$  máxima. A frequência

$$(46) \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ,$$

que satisfaz o requisito (45), diz-se frequência própria do circuito e o regime forçado diz-se então em ressonância. Note-se que se cumpre então (para  $\omega = \omega_0$ , portanto):

$$(47) \quad \begin{cases} i_0(\omega_0) = (i_0)_{\text{máx}} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \\ \varphi(\omega_0) = 0 \end{cases}$$

Resulta daqui que, para  $\omega = \omega_0$ , se tem:

$$(48) \quad i = \frac{\mathcal{E}^a}{R}$$

como se, rigorosamente, estivéssemos em regime estacionário; há uma perfeita compensação dos dois efeitos, de self-indução e capacitivo.

Este efeito de ressonância, presta-se, por detecção experimental de  $(i_0)_{\max}$  quando se faz variar  $\omega$ , à medida de uma das grandezas  $L$  ou  $C$ , desde que conhecida a outra, mediante a utilização de (46).

#### V.5.5.4 → Regime livre num circuito $R, L, C$

Tomando a eq. (38) sem 2º membro, o regime livre num circuito  $R, L, C$  pode encarar-se fisicamente como o regime de descarga de um condensador através de um condutor com resistência  $R$  e self-indução  $L$ . As soluções de uma equação

$$(49) \quad L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0$$

buscam-se entre funções do tipo  $e^{kt}$ , cujo teste em (49) conduz a

$$(50) \quad \left. \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \right\} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} \quad ;$$

ou seja, com

$$(51) \quad \delta = R/2L \quad \text{e} \quad \omega_0^2 = 1/LC,$$

$$(52) \quad \left. \begin{matrix} k_1 \\ k_2 \end{matrix} \right\} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

Há três regimes possíveis consoante os valores de  $R, L$  e  $C$ , ou seja consoante os valores de  $\delta$  e de  $\omega_0$ .

Caso I:  $k_1$  e  $k_2$  reais e diferentes, ambos negativos. A solução apresenta-se então como

$$(53) \quad q(t) = A e^{-|k_1|t} + B e^{-|k_2|t}$$

ou seja como a soma de duas exponenciais decrescentes para zero;  $A$  e  $B$  são constantes fixadas pelas condições iniciais  $i = i_0$  e  $q = q_0$  para  $t = 0$ . Trata-se de um regime monotonicamente decrescente para zero, conhecido na literatura por regime aperiódico.

Caso II:  $k_1 = k_2 = -\delta$ , reais e iguais, ambos negativos. A solução mostra-se então ser:

$$(54) \quad q(t) = A e^{-\delta \cdot t} + B t e^{-\delta \cdot t}$$

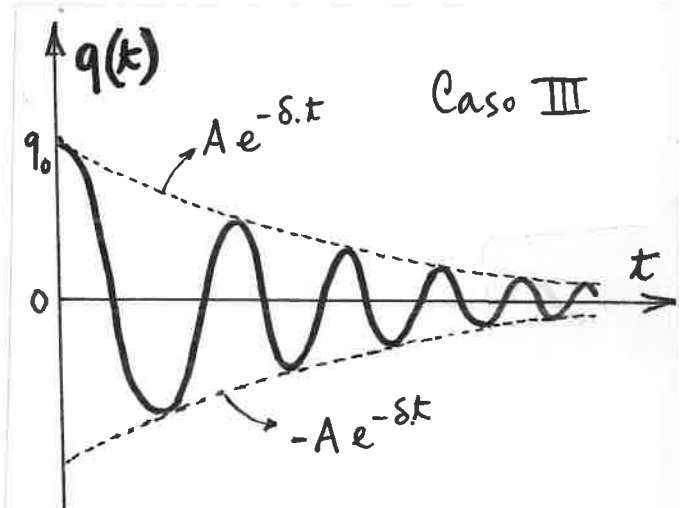
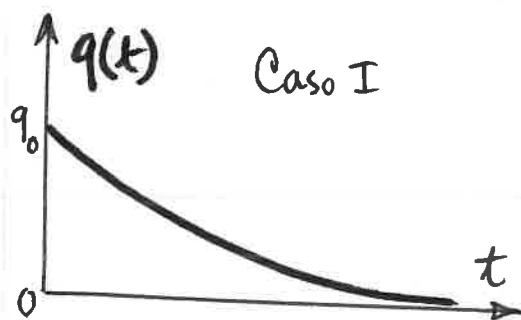
ou seja como a soma de duas funções ainda decrescentes exponencialmente ou quasi-para zero; as constantes  $A$  e  $B$  são fixadas pelas condições iniciais. Diz-se regime aperiódico crítico.

Caso III:  $k_1$  e  $k_2$  complexos conjugados. Não é difícil mostrar que a soma das exponenciais correspondentes conduz à solução

$$(55) \quad q(t) = A e^{-\delta \cdot t} \cos[(\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2} t - \alpha]$$

com  $A$  e  $\alpha$  a serem fixados pelas condições iniciais.

Trata-se de um regime também decrescente para zero, mas oscilatoriamente; diz-se um regime oscilatório amortecido. Pode encarar-se como pseudo-periódico — produto de uma função sinusoidal por uma amplitude decrescente para zero. A pseudo-frequência vale  $(\omega_0^2 - \delta^2)^{1/2}$  e o amortecimento da amplitude é medido por  $\delta$ . Este regime tem como equivalente mecânico o pêndulo real, de pequenas oscilações, face à resistência do ar. Se  $L/R$  é um tempo suficiente longo face ao período  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  (então  $\delta$  é pequeno face a  $\omega_0$ ), o amortecimento da amplitude é fraco e o circuito comporta-se na descarga do condensador como um circuito oscilante, de frequência  $\omega_0$ , a sua frequência própria. O amortecimento está directamente ligado à existência de  $R$ , como quem diz à dissipação de energia por efeito de Joule; um circuito com resistência desprezável é um circuito perduravelmente oscilante. As figuras abaixo representam dois diferentes casos de descarga de um condensador (em circuito  $R, L, C$ ) na aproximação do campo electromagnético quasi-estacionário.



# SISTEMA DE CIRCUITOS EM REGIME VARIÁVEL

(Na aproximação do campo quasi-estacionário)

- Para cada um dos circuitos, por conveniente aplicação das equações 
$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}^a - \text{grad } V - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \\ \vec{B} = \text{rot } \vec{A} \end{cases}$$

obtem-se a lei que rege o circuito sob a forma:

$$R_{\alpha} i_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{C_{\alpha}} + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{c} \Phi_{\alpha} \right) = \mathcal{E}_{\alpha}^a$$

( $\alpha$  é o índice do circuito genérico;  $\alpha = 1, 2, \dots, N$ )

- Considerando agora a interação magnética dos circuitos (sistema de circuitos magneticamente acoplados), ter-se-á

$$\frac{1}{c} \Phi_{\alpha} = \sum_{\beta=1}^N L_{\alpha\beta} i_{\beta}$$

e daí resulta

$$R_{\alpha} i_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{C_{\alpha}} + \sum_{\beta=1}^N L_{\alpha\beta} \frac{di_{\beta}}{dt} = \mathcal{E}_{\alpha}^a$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots, N)$$

- É este o sistema de equações integro-diferenciais (acopladas) que rege o comportamento dos  $N$  circuitos com interação magnética, quer em regime livre, quer em regime forçado.
- Damos a seguir a aplicação deste tratamento ao caso simples de 2 circuitos, em regime forçado.

## Sistema de 2 circuitos magneticamente acoplados

$$\begin{cases} R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = \mathcal{E}_1^a \\ R_2 i_2 + \frac{1}{C_2} \int i_2 dt + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = \mathcal{E}_2^a \end{cases}$$

- Suponhamos que as f.e.m.'s são alternadas sinusoidais:

$$\mathcal{E}_1^a = F_0^{(1)} e^{j\omega t} \quad ; \quad \mathcal{E}_2^a = F_0^{(2)} e^{j\omega t}$$

e consideremos apenas o problema do regime forçado.

- Ensaia-se a solução conjunta:

$$i_1 = I_1 e^{j\omega t} \quad ; \quad i_2 = I_2 e^{j\omega t}$$

- As amplitudes (complexas)  $I_1$  e  $I_2$  devem satisfazer o sistema:

$$\begin{cases} R_1 I_1 - j \frac{1}{C_1 \omega} I_1 + j L_1 \omega I_1 + j M \omega I_2 = F_0^{(1)} \\ R_2 I_2 - j \frac{1}{C_2 \omega} I_2 + j L_2 \omega I_2 + j M \omega I_1 = F_0^{(2)} \end{cases}$$

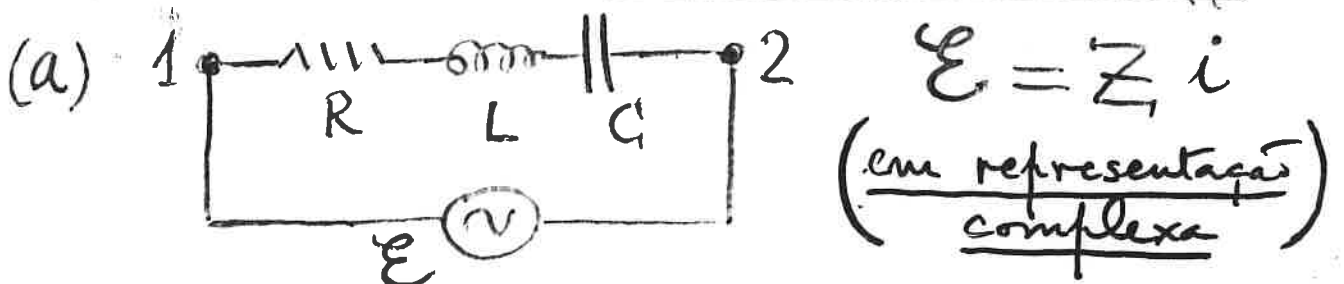
ou, sob forma mais compacta:

$$\begin{cases} Z_1 I_1 + j M \omega I_2 = F_0^{(1)} \\ j M \omega I_1 + Z_2 I_2 = F_0^{(2)} \end{cases}$$

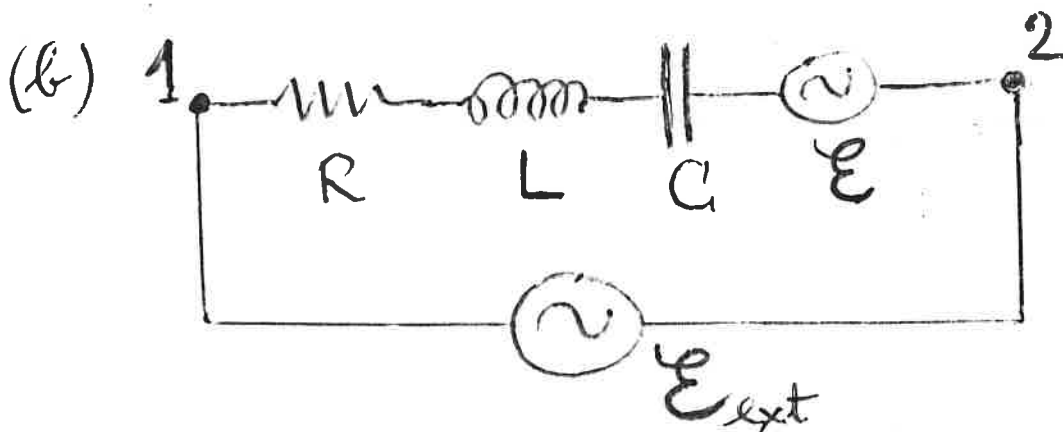
donde facilmente se extraem  $I_1$  e  $I_2$ .

Rede de circuitos RLC e f.e.m.s alternadas sinusoidais de uma certa frequência  $\omega$ , em regime forçado.

- Generalização da 1ª lei de Kirchhoff:  
Em cada nó :  $\sum_k i_k(t) = 0$
- Generalização da 2ª lei de Kirchhoff:

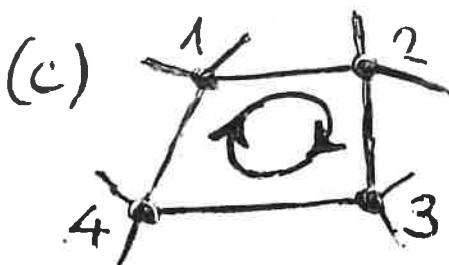


$$Z_i i = V_1 - V_2 \quad \text{e} \quad V_1 - V_2 = \mathcal{E}$$



$$V_1 - V_2 = \mathcal{E}_{ext} \quad ; \quad Z_i i = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{ext}$$

$$Z_i i - \mathcal{E} = V_1 - V_2$$



$$\sum_j (Z_j i_j - \mathcal{E}_j) = 0$$

— Em cada malha —

## A. Leis de associação de impedâncias

• SÉRIE :  $Z = Z_1 + Z_2$

$$\left[ R = R_1 + R_2 ; L = L_1 + L_2 ; \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right]$$

• PARALELO :  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2}$

[ Casos especiais de impedâncias

- puramente resistivas

- puramente indutivas

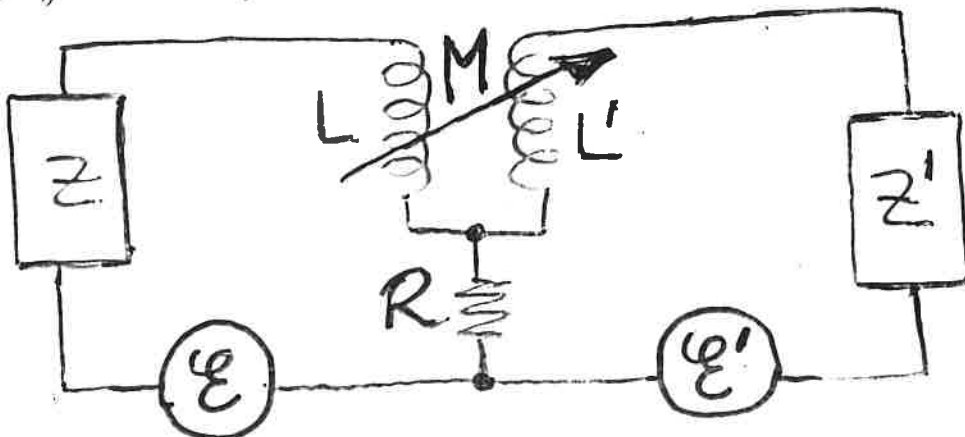
- puramente capacitivas ]

## B. Teorema de Thévenin

Noção analógica de impedância  $Z$  equivalente (entre 2 pontos tomados como electrodos, em regiões não capacitivas). Generalização com base num princípio de sobreposição de estados de regime forçado.

## C. Redes e interacção magnética entre ramos vizinhos

A figura representa um exemplo muito simples:



Para o tratamento deste problema, fazem-se intervir as leis de Kirchhoff generalizadas, tendo em conta os efeitos de indução mútua como f.e.m.'s adicionais nos ramos nisso envolvidos, de modo semelhante ao que se pratica num sistema de circuitos acoplados.