CAP. IV — CAMPO MAGNÉTICO

1ª Parte : CAMPO MAGNÉTICO DAS CORRENTES

IV. 1 — Leis de Biot-Savart e de Laplace

IV. 1.1 — Lei de Biot-Savart

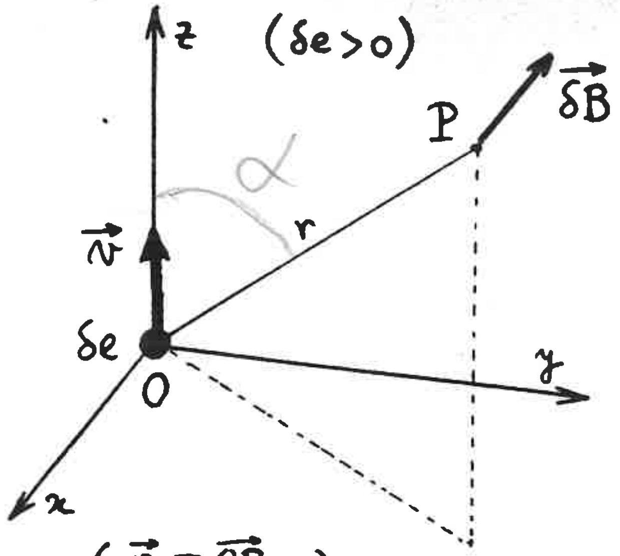
Sabemos desde as experiências de Oersted (1820) que uma corrente eléctrica cria no espaço um campo magnético, o qual pode revelar-se pela acção exercida sobre pequenos corpos magnéticos (com propriedades prèviamente conhecidas, como se sabe). Rowland mostrou mais tarde (1875) que o mesmo efeito é produzido por uma carga eléctrica mecânicamente móvel. (*)

Assim, enquanto uma carga eléctrica em repouso relativamente ao observador cria no espaço um campo eléctrico, uma carga eléctrica que se mova em relação ao observador cria no espaço não só um campo eléctrico mas também um campo magnético. Este campo magnético é regido pela lei de Biot-Savart, elaborada a partir dos factos experimentais, e que passamos a enunciar.

Suponhamos uma carga eléctrica elementar δe que se acha animada da velocidade $\vec{v}$, no instante t, num dado referencial (por hipótese um referencial de inércia). Esta

---

(*) Para estabelecer experimentalmente a equivalência entre uma carga mecânicamente móvel e uma corrente eléctrica, no tocante ao campo magnético produzido, H.A. Rowland imprimiu rotações de grande velocidade a uma placa metálica circular carregada e isolada e detectou os efeitos magnéticos desta corrente artificial resultante do movimento rotacional das cargas.



$\begin{pmatrix} \vec{r} \equiv \overrightarrow{OP} \\ r = |\overrightarrow{OP}| \end{pmatrix}$

carga cria em todo o ponto P do referencial, à distância r da carga, suposta nesse instante no ponto O (v. Figura), um campo magnético que descreveremos mediante um vector <u>indução magnética (elementar)</u>, $\overrightarrow{\delta B}_P$, dado pela relação

$$\overrightarrow{\delta B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c}\, \delta e \, \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}}{r^3} \qquad \text{(IV-1)}$$

para observações supostas realizadas no vácuo. Esta relação, em que $\mu_0/4\pi c$ representa uma constante de proporcionalidade(*), traduz os seguintes factos experimentais: (1) A <u>indução magnética</u> $\overrightarrow{\delta B}_P$ é <u>transversal</u> à direcção de observação, $\vec{r}$, e <u>normal</u> à direcção da velocidade da carga; (2) <u>Sendo $\delta e > 0$</u> o sentido de $\overrightarrow{\delta B}_P$ é tal que os três vectores $\vec{v}$, $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$ e $\overrightarrow{\delta B}_P$ formam um <u>triedro directo</u>; (3) A <u>indução magnética</u>, <u>em módulo</u>, é proporcional ao valor da carga, <u>δe</u>, e ao módulo da velocidade, sendo inversamente proporcional ao quadrado da distância do observador à carga móvel. (4) $\sin\alpha$

(4) $\overrightarrow{\delta B}_P = 0$ quando $\vec{v} // \overrightarrow{OP}$ ($\alpha = 0$)

A lei de Biot-Savart <u>é uma lei aproximada</u>; na verdade só é válida para velocidades muito menores que

---

(*) <u>μ_0</u> e <u>c</u> são constantes positivas, cujo significado será ulteriormente esclarecido (<u>μ_0</u>, <u>permeabilidade magnética do vácuo</u>; <u>c</u>, <u>constante electromagnética universal</u>); tomemos, por agora, $\mu_0/4\pi c$, em bloco, apenas como uma constante de proporcionalidade.

a velocidade da luz no vácuo : $|\vec{v}| << a_0$. Esta condição cumpre-se sempre que as cargas se acham organizadas em corrente eléctrica no interior de um condutor, e é nesse domínio que decorre o nosso estudo, por agora. Mas este carácter aproximado da lei de Biot-Savart não pode deixar de ter-se em conta em assuntos mais avançados.

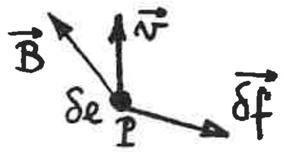
A relação (IV-1) pode escrever-se sob a forma

$$(\text{IV-2}) \qquad \delta\vec{B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\,\delta e\,\vec{v}\wedge \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \quad ,$$

adiante muito utilizada.

IV.1.2. — Lei de Laplace

Seja agora uma carga eléctrica elementar δe, em movimento relativamente ao observador (num dado referencial de inércia, por hipótese), com uma velocidade $\vec{v}$ no instante t, e submetida à acção de um campo magnético exterior de indução $\vec{B}(P)$. A experiência revela que esta carga é actuada nesse instante t por uma força elementar $\vec{\delta f}$ dada por



$$(\text{IV-3}) \qquad \vec{\delta f} = \frac{1}{c}\,\delta e\,\vec{v}\wedge\vec{B}$$

se fôr $\vec{B}$ a indução magnética no ponto actualmente ocupado pela carga móvel (i.e., no instante t). Esta relação (IV-3) traduz a <u>lei de Laplace</u>. É uma lei experimental que se revela rigorosa, <u>válida mesmo para velocidades muito grandes</u>. Pela relação (IV-3), a força $\vec{\delta f}$, que se designa por <u>força electrodinâmica</u>, fica <u>constantemente perpendicular a $\vec{v}$ e $\vec{B}$</u>, vectores com os quais deve formar um <u>triedro directo</u> <u>no caso de ser $\delta e > 0$</u> (v. figura). É de notar desde logo, como facto muito importante, que a força electrodinânica $\vec{\delta f}$, actuando sobre uma partícula electrizada de carga δe em movimento, não realiza trabalho nenhum, por ser constantemente normal à trajectória da partícula ($\vec{\delta f}$ é $\perp$ a $\vec{v}$). Então, uma partícula electrizada que penetra num campo magnético modifica a sua trajectória, sem perda nem ganho de energia. (Na ausência de qq outro campo de forças)

Se a carga δe está simultâneamente submetida a um campo eléctrico $\vec{E}$ e a um campo magnético de indução $\vec{B}$, então, à força electrodinâmica dada pela lei de Laplace vai adicionar-se uma força de carácter electrostático, $\delta e \vec{E}$, e a força total que actua a carga vem dada por

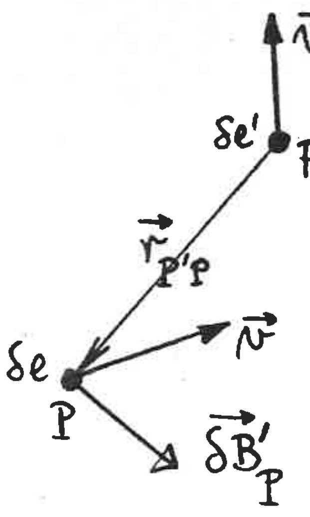
$$(IV-4) \qquad \vec{\delta f} = \delta e \left(\vec{E} + \frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

que se diz fórmula de Laplace - Lorentz. Esta relação (IV-4) põe em evidência que o vector $\frac{1}{c} \vec{v} \wedge \vec{B}$ pode ser assimilado a um campo eléctrico fictício, cujo significado é bem esclarecido na Teoria da Relatividade.

18/11/90

IV.1.3 - Lei das acções electrodinâmicas (entre cargas em movimento)

Consideremos duas cargas elementares δe e $\delta e'$, em movimento, com velocidades respectivamente $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ num dado referencial, e respectivas posições P e P' num dado instante (v. Figura). Podemos combinar as duas leis precedentes (lei de Biot-Savart e lei de Laplace) para encontrarmos a lei das acções electrodinâmicas entre as duas cargas em movimento. Com efeito, a carga $\delta e'$, com velocidade $\vec{v}'$, produz, no ponto P em que actualmente se encontra a



carga δe, um campo magnético elementar de indução $\delta \vec{B}'_P$ (representado na Figura) dado pela lei de Biot-Savart:

$$(\text{IV}-5) \qquad \delta \vec{B}'_P = \frac{\mu_0}{4\pi c}\, \delta e' \, \frac{\vec{v}' \wedge \vec{r}}{r^3} \,. \qquad \begin{pmatrix} \vec{r} \equiv \overrightarrow{P'P} \\ r = |\vec{r}| \end{pmatrix}$$

Mas este campo actua sobre a carga $\underline{\delta e}$, com velocidade $\vec{v}$, produzindo-lhe uma força dada pela lei de Laplace

$$(\text{IV}-6) \qquad \delta^2 \vec{f} = \frac{1}{c}\, \delta e \, \vec{v} \wedge \delta \vec{B}'_P \,.$$

Combinando (IV-5) com (IV-6), obtém-se

$$(\text{IV}-7) \qquad \overrightarrow{\delta^2 f} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2}\, \delta e \, \delta e' \, \vec{v} \wedge \left(\frac{\vec{v}' \wedge \vec{r}}{r^3} \right)$$

como a força com que a carga $\underline{\delta e'}$ actua sobre a carga $\underline{\delta e}$ (mediante o campo $\delta \vec{B}'_P$ que $\delta e'$ produz). Um procedimento idêntico é válido reciprocamente, de $\underline{\delta e}$ para $\underline{\delta e'}$. Virá:

$$(\text{IV}-7') \qquad \overrightarrow{\delta^2 f'} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2}\, \delta e \, \delta e' \, \vec{v}' \wedge \left(\frac{\vec{v} \wedge \vec{r}'}{r^3} \right)$$

como a força com que a carga $\underline{\delta e}$ actua sobre a carga $\underline{\delta e'}$; note-se só que $\vec{r}' \equiv \overrightarrow{PP'}$ $(\vec{r}' = -\vec{r})$.

As relações (IV-7) e (IV-7') constituem a <u>lei das acções electrodinâmicas</u> (i.e. <u>para cargas em movimento</u>). Deve salientar-se que, <u>ao contrário do que se passa com a lei de Coulomb das interacções electrostáticas, a lei das acções electrodinâmicas afasta-se radicalmente de um Princípio de Acção e Reacção</u>. Com efeito, as duas forças, $\overrightarrow{\delta^2 f}$ aplicada em P (à carga δe) e $\overrightarrow{\delta^2 f'}$ aplicada em P' (à carga $\delta e'$): (1) não se dirigem em geral segundo a linha de acção $\overline{PP'}$; (2) não são em geral vectores simétricos (i.e. $\overrightarrow{\delta^2 f'} \neq -\overrightarrow{\delta^2 f}$). [Por outras palavras, $\overrightarrow{\delta^2 f}$ e $\overrightarrow{\delta^2 f'}$ <u>não são</u> duas forças «iguais-e-directamente-opostas».]

não

IV. 1. 4 — Aditividade dos campos magnéticos produzidos por fontes distintas

Comecemos por fazer agora um reparo importante sobre algo que está, òbviamente, subentendido na expressão dada às leis de Biot-Savart e de Laplace. As acções magnéticas produzidas por cargas em movimento ou exercidas sobre cargas em movimento são compensadas por acções mecânicas e tornam-se, portanto, deste modo susceptíveis de serem medidas como forças, i.e., como grandezas da mesma espécie que as forças mecânicas com as quais entram em equilíbrio. Com efeito, a lei de Laplace descreve já a acção magnética directamente como uma força (o que não pode deixar de significar que na sua medida intervieram as forças mecânicas). No que respeita à lei de Biot-Savart, ela descreve a acção magnética mediante uma indução $\vec{B}$, a qual é porém obtida a partir do sistema de forças que se exerce sobre o corpo detector da dita acção magnética (binário sobre um pequeno íman, p. ex).

Encontra-se assim bem fundamentada experimentalmente, em consequência, a aditividade das forças de natureza magnética, pela regra do paralelogramo — que é a regra de soma das forças mecânicas. Ora, da aditividade vectorial das forças magnéticas que se exercem por exemplo sobre uma carga em movimento, supostas produzidas por duas fontes distintas (correntes ou ímans), decorre a aditividade vectorial dos campos magnéticos representativos dessas fontes. Vejamos como.

Seja com efeito a carga δe em movimento com uma velocidade $\vec{v}$, submetida à acção conjunta de duas fontes distintas, as quais produzem no ponto P em que se encontra a partícula os campos de indução $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$, respectivamente. Então, as forças $\vec{\delta f_1}$ e $\vec{\delta f_2}$ com que os dois campos, cada um de per si, solicitam a carga δe, são aditivas vectorialmente: a força resultante

$$(\text{IV-8}) \qquad \vec{\delta f} = \vec{\delta f_1} + \vec{\delta f_2}$$

representa a acção global das duas fontes. Mas pela lei de Laplace tem-se, para cada um dos campos de per si:

$$(\text{IV-9a}) \qquad \vec{\delta f_1} = \frac{1}{c}\,\delta e\,\vec{v}\wedge\vec{B}_1$$

e

$$(\text{IV-9b}) \qquad \vec{\delta f_2} = \frac{1}{c}\,\delta e\,\vec{v}\wedge\vec{B}_2 \quad ;$$

e para o campo global $\vec{B}$ deverá ter-se

$$(\text{IV-3})' \qquad \vec{\delta f} = \frac{1}{c}\,\delta e\,\vec{v}\wedge\vec{B}$$

sendo $\vec{\delta f}$ a força global. Ora, de (IV-8), (IV-9a) e (IV-9b) resulta

$$(\text{IV-10}) \qquad \vec{\delta f} = \frac{1}{c}\,\delta e\,\vec{v}\wedge(\vec{B}_1+\vec{B}_2) \quad ;$$

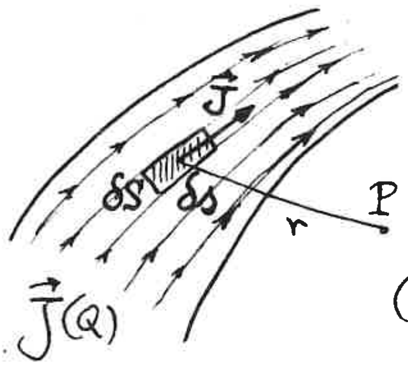
e como as duas relações (IV-3)' e (IV-10) se devem verificar para qualquer velocidade $\vec{v}$ da partícula, segue-se que se deve ter

$$(\text{IV-11}) \qquad \vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 \quad .$$

São assim aditivos, pela regra do paralelogramo, os campos magnéticos produzidos, no mesmo ponto, por fontes distintas. Este princípio de sobreposição tem múltiplas aplicações; entre elas, a possibilidade de estender o cálculo da indução, pela lei de Biot-Savart, a correntes percorrendo condutores extensos (como se faz nos §§ seguintes).

IV.2 — Leis de Biot-Savart e de Laplace para corrente eléctrica distribuída em volume

Notando que um tubo elementar de corrente, no seio de um condutor (v. Figura) — tubo elementar de linhas de força de $\vec{J}$ ocupando um volume $\delta v = \delta S . \delta s$ — pode ser assimilado a uma carga em movimento — precisamente a carga móvel contida em δv, $\delta e = \rho_m \delta v$, com a velocidade $\vec{v}$ que possui na corrente — e notando ainda que nessas condições se cumpre a equivalência



$$(\text{IV}-12) \qquad \vec{J}\,\delta v = \rho_m \vec{v}\,\delta v = \delta e\,\vec{v} \ ,$$

v para 2 grandezas ≠S

então, a lei de Biot-Savart (IV-2) escreve-se

$$(\text{IV}-13) \qquad \delta\vec{B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\left(\vec{J} \wedge \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right)\delta v$$

para dar o campo produzido pelo tubo elementar de corrente. Fazendo jogar a aditividade dos campos elementares, virá para o campo produzido por todo um volume do condutor

$$(\text{IV}-14) \qquad \vec{B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\int_v \left(\vec{J} \wedge \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right) dv$$

(Mostra-se que esta expressão é igualmente válida no caso de P ser <u>interior</u> ao volume <u>v</u> potenciante).

No que respeita à lei de Laplace para um condutor extenso, com corrente distribuída em volume, quando ele é imerso num campo magnético $\vec{B}(P)$ — a ~~mesma~~ relação de equivalência já utilizada, (IV-12), permite escrever para a força actuante num tubo elementar de corrente, como o da Figura acima:

$$(\text{IV}-15) \qquad \delta\vec{f} = \frac{1}{c}\,\vec{J} \wedge \vec{B}\,\delta v \ .$$

Há assim uma distribuição de forças por todo o volume do condutor e (IV-15) permite definir uma <u>densidade de força electrodinâmica por unidade de volume</u>, $\vec{\mathcal{F}}$:

densidade já pressupõe por unidade de volume

$$(\text{IV}-16) \qquad \vec{\mathcal{F}} = \frac{1}{c}\,\vec{J} \wedge \vec{B}$$

O sistema de forças produzidas pelo campo magnético sobre o condutor extenso estuda-se òbviamente a partir de (IV-15).

IV. 3 — Propriedades do campo magnético da corrente estacionária

IV. 3. 1 — Carácter solenoidal da indução magnética

Retomemos a eq. (IV–14) que exprime a indução magnética $\vec{B}$ no caso geral de uma distribuição de correntes com densidade $\vec{J}(Q)$ num condutor extenso:

$$(\text{IV}-14)' \qquad \vec{B}_P = -\frac{\mu_0}{4\pi c}\int_v \left(\vec{J}\wedge \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right) dv$$

sendo v o volume do condutor, $r \equiv \overline{PQ}$, Q o ponto potenciante genérico e P um ponto qualquer do espaço.

Demonstra-se que se pode dar a (IV–14)' a seguinte forma:

$$(\text{IV}-17) \qquad \vec{B}_P = \operatorname{rot}_P\left[\frac{\mu_0}{4\pi c}\int_v \frac{\vec{J}}{r}\, dv\right]$$

(com P q.q. no espaço).

Para a demonstração, damos os seguintes elementos:

1. Recorre-se à identidade diferencial (*)

$$\operatorname{rot}_P\left(\frac{\vec{J}}{r}\right) = \frac{1}{r}\operatorname{rot}_P\vec{J} - \vec{J}\wedge\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}$$

que permite transformar (IV–14)' em

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c}\left[\int_v \operatorname{rot}_P\left(\frac{\vec{J}}{r}\right) dv - \int_v \frac{1}{r}\operatorname{rot}_P\vec{J}\, dv\right]$$

2. Esta nova expressão admite duas simplificações:

(a) O 2º integral é nulo. Quando P é exterior ao volume v, porque temos então sempre $\operatorname{rot}_P\vec{J} = 0$ $(\vec{J}\equiv\vec{J}(Q))$. Se P é interior ao volume v, $\operatorname{rot}_P\vec{J}$ só poderá ser $\neq 0$, mas finito, no elemento de volume circunvizinho a P, onde precisamente $1/r$ se vai tornar ∞; acontece porém que dv é um infinitamente pequeno de ordem superior a r — o 2º integral é ainda nulo.

(*) A verificar pelas representações cartesianas dos operadores.

(b) No 1º integral, sendo $\vec{J}$ função finita e contínua, pode mostrar-se que os símbolos operatoriais $\int_v$ e rot_P comutam.

A nova expressão (IV-17) para $\vec{B}_P$ equivale a dizer que a indução magnética $\vec{B}$ deriva de um potencial-vector $\vec{A}$ mediante a operação

(IV-18) $$\vec{B}_P = \text{rot}_P \vec{A}$$ (em q.q. P do espaço)

sendo $\vec{A}$ dado por

(IV-19) $$\vec{A}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c}\int_v \frac{\vec{J}(Q)}{r_{PQ}}\,dv \quad .$$

Uma primeira consequência importante de (IV-17) é que esta expressão impõe que em todo o ponto do espaço se tenha

(IV-20) $$\text{div}\,\vec{B} = 0 \quad . \qquad (*)$$

(Um campo $\vec{B}$ satisfazendo (IV-20) em todo o ponto do espaço diz-se solenoidal.) A indução magnética $\vec{B}(P)$ é um campo solenoidal e importa desde já salientar as propriedades associadas a este carácter solenoidal do campo.

Recorde-se que (IV-20), sendo válida em todo o ponto do espaço,

---

(*) Com efeito, sempre que $\vec{Z} = \text{rot}\,\vec{X}$, então $\text{div}\,\vec{Z} = 0$, porque $\text{div}\,\text{rot}\,\vec{X} = 0$ é uma identidade (i.e. cumpre-se para um vector $\vec{X}$ arbitrário), como fàcilmente se verifica utilizando as representações cartesianas dos operadores (p.ex.). Pode mostrar-se que, reciprocamente, se $\text{div}\,\vec{Z} = 0$ em todo o ponto do espaço, então $\vec{Z}$ exprime-se necessàriamente como rotacional de um vector $\vec{Y}$ a determinar, definido aliás a menos do gradiante de um escalar ϕ arbitrário: $\vec{Z} = \text{rot}\,\vec{Y}$ ou $\vec{Z} = \text{rot}\,(\vec{Y} + \text{grad}\,\phi)$. Assim, as relações (IV-20) e (IV-18) podem tomar-se como equivalentes, se ao 2º membro de (IV-19) se acrescenta o gradiante de um escalar arbitrário $(\text{grad}\,\phi)$.

é equivalente a ser nulo o fluxo de $\vec{B}$ através de qualquer superfície fechada (regular):

$$(\text{IV}-21) \qquad \int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS = 0 \qquad \left(\begin{array}{c}\text{para qualquer superfície}\\ \text{fechada } S \text{ (regular)}\end{array}\right)$$

— como assegura o teorema do fluxo-divergência —. E de (IV-21) resulta que $\vec{B}(P)$ é um campo de fluxo conservativo (Cf. Cap. III, § III.7). Acrescente-se que, sendo $\vec{B}$ um campo de fluxo conservativo, então, as suas linhas de força fecham-se sobre si próprias. (quando não se perdem no infinito)

[O carácter solenoidal da indução magnética $\vec{B}$, assim posto em evidência não é aqui mais que uma consequência da lei de Biot-Savart; mas deve a sua importância ao facto de que se revela, na verdade, uma propriedade fundamental que se estende a todos os domínios do campo electromagnético. A eq. (IV-20) tem já com efeito a forma exacta de uma das equações de Maxwell, que assumem como se sabe o papel de Princípios do Electromagnetismo.]

IV.3.2 — Propriedades do potencial-vector $\vec{A}$

Já fizemos notar que ao potencial-vector $\vec{A}$ dado por (IV-19) se pode sempre somar um vector irrotacional arbitrário, com o mesmo resultado para a operação (IV-18): $\vec{A}$ é definido a menos do gradiante de um escalar arbitrário ϕ. Isto significa que, enquanto $\text{rot}_P\vec{A}$ é o vector bem determinado $\vec{B}_P$ (eq. (IV-18)), $\text{div}_P\vec{A}$ fica completamente arbitrária.

Demonstra-se no entanto que, se a corrente é estacionária, então a escolha particular que se faz, ao adoptar como vector $\vec{A}$ aquele que é precisamente dado por (IV-19), conduz a ter-se em todo o ponto

$$(\text{IV}-22) \qquad \text{div}_P\vec{A} = 0 \,.$$

Para a demonstração damos os seguintes elementos:

1. A aplicação do operador div_P a ambos os membros de (IV-19) conduz a

$$\text{div}_P \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \text{div}_P \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) dv$$

porque, sendo $\vec{J}$ finita e contínua os símbolos operatoriais $\int_v$ e div_P comutam. Mas esta relação transforma-se em

$$\text{div}_P \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \left[\frac{1}{r} \text{div}_P \vec{J} + \vec{J} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} \right] dv$$

mediante uma identidade diferencial conhecida.

2. Supõe-se primeiro P exterior ao volume $\underline{v}$. Tem-se sempre, nesse caso, $\text{div}_P \vec{J} = 0$. E sendo Q o ponto potenciante ($r \equiv \overline{PQ}$) vem:

$$\text{div}_P \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \int_v \vec{J} \cdot \text{grad}_Q \frac{1}{r} \, dv \qquad (\text{grad}_P = -\text{grad}_Q).$$

3. Utilizando agora para o ponto Q a mesma identidade diferencial usada acima para o ponto P, vem:

$$\text{div}_P \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \left[\int_v \text{div}_Q \left(\frac{\vec{J}}{r} \right) dv - \int_v \frac{1}{r} \text{div}_Q \vec{J} \, dv \right]$$

ou ainda, por aplicação do teorema do fluxo-divergência ao 1º integral

$$\text{div}_P \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi c} \left[\iint_S \frac{\vec{J} \cdot \vec{n}}{r} dS - \int_v \frac{1}{r} \text{div}_Q \vec{J} \, dv \right]$$

sendo S a superfície limítrofe do condutor.

4. Ora, com corrente estacionária, não só $\text{div}_Q \vec{J} = 0$ em todo o ponto Q interior a $\underline{v}$, mas também $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$ sobre a superfície limítrofe S. Portanto, $\text{div}_P \vec{A} = 0$.

5. Considera-se depois P interior ao volume $\underline{v}$. Neste caso, se se cava um alvéolo em torno do ponto P, é aplicável toda a argumentação precedente para a distribuição de corrente desprovida do volume do alvéolo. Passa-se depois ao limite desta situação quando o alvéolo se contrai sobre o ponto P. Basta então verificar que nessa passagem, vai ter

limite nulo o integral de $\vec{J}\cdot\vec{n}/r$ ao longo da superfície limítrofe do alvéolo, integral este que se introduz em adição aos integrais já discutidos na última expressão escrita em 3.. Em suma, a eq. $\mathrm{div}_P \vec{A} = 0$ também se cumpre para P interior a $\underline{v}$.

Vejamos agora que a definição (IV-19) adoptada para o potencial-vector $\vec{A}$ permite ainda extrair muito fàcilmente o valor de $\mathrm{lap}\,\vec{A}$ (*). Recorremos para isso à similitude formal entre a definição das componentes cartesianas do potencial-vector $\vec{A}$, a saber (por (IV-19)):

$$(\text{IV}-19)' \qquad A_\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi c}\int_v \frac{J_\alpha}{r}\,dv \qquad (\alpha = x, y, z)$$

e a definição do potencial-escalar V na Electrostática

$$(\text{IV}-19)'' \qquad V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_v \frac{\rho}{r}\,dv \quad .$$

Tendo em conta que as funções envolvidas num e noutro caso gozam das mesmas propriedades matemáticas gerais, deve concluir-se que assim como V definido por (IV-19)'' satisfaz a equação de Poisson $\mathrm{lap}\,V = -\frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, também cada uma das componentes A_α deve satisfazer uma equação diferencial do mesmo tipo, por ser definida por (IV-19)' formalmente semelhante a (IV-19)''; ou seja:

$$\mathrm{lap}\,A_\alpha = -\frac{\mu_0}{c}J_\alpha \qquad (\alpha = x, y, z) .$$

Pode portanto escrever-se:

$$(\text{IV}-23) \qquad \mathrm{lap}\,\vec{A} = -\frac{\mu_0}{c}\vec{J} \quad .$$

22/1/90

(*) Recorde-se que

$$\mathrm{lap}\,\vec{X} \equiv \sum_\alpha^{x,y,z} (\mathrm{lap}\,X_\alpha)\,\vec{e}_\alpha$$

sendo $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha = x, y, z)$ os vectores unitários dos eixos cartesianos e X_α $(\alpha = x, y, z)$ as componentes cartesianas do vector $\vec{X}$.

IV. 3.3 — Equação de Ampère

Com os resultados dos §§ precedentes, ficamos em condições de deduzir a expressão da segunda propriedade diferencial do campo da indução magnética $\vec{B}(P)$, a saber, o valor em cada ponto de $\operatorname{rot}\vec{B}$. Tem-se com efeito, por (IV-18) : $\operatorname{rot}\vec{B} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A}$; e utilizando a identidade diferencial (*) [(*) V. Nota da Pág 167]

$$\text{(IV-24)} \qquad \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{A} - \operatorname{lap}\vec{A} \,,$$

combinada com as propriedades (IV-22) e (IV-23) do potencial-vector $\vec{A}$, conclue-se que

$$\text{(IV-25)} \qquad \operatorname{rot}\vec{B} = \frac{\mu_0}{c}\vec{J} \,.$$

É a <u>equação de Ampère</u>. Vê-se, por esta <u>propriedade do campo magnético da corrente estacionária</u> (**), que o campo da indução magnética $\vec{B}(P)$, de carácter solenoidal por (IV-20), tem "fontes de vórtice" que se identificam com a distribuição da densidade de corrente $\vec{J}$ no volume do condutor. Se se utiliza o vector <u>campo magnético</u> $\vec{H}$, em vez de $\vec{B}$, (os dois vectores acham-se relacionados, no vácuo, muito simplesmente por $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$, podendo dizer-se que não têm aí significações físicas fundamentalmente diferentes), então

---

(**) O facto de a eq. (IV-22) $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ ser válida sòmente para corrente estacionária implica òbviamente que a propriedade (IV-25) seja também válida apenas dentro do mesmo domínio. Pode dizer-se no entanto que a equação de Ampère denuncia em si mesma o domínio de validade que lhe é próprio. Com efeito, a aplicação do operador <u>div</u> em ambos os membros de (IV-25), por ser $\operatorname{div}\operatorname{rot} \equiv 0$, faz-nos cair em $\operatorname{div}\vec{J} = 0$, condição essencial da corrente estacionária.

(IV-25) reescreve-se como

$$\text{(IV-25)}' \qquad \text{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\,\vec{J}$$

Esta substituição é, neste domínio do campo magnético das correntes, absolutamente irrelevante; mas tem a vantagem de preparar a extensão da equação de Ampère ao domínio do campo magnético dos ímans. É com efeito sob esta forma (IV-25)', mas já com um conteúdo mais vasto, que a equação de Ampère se vai apresentar com maior frequência para traduzir uma lei generalizada do campo magnético estacionário (produzido por correntes estacionárias ou por ímans). Usemo-la desde já.

Estabeleçamos agora a versão sob forma integral da equação de Ampère (equação diferencial traduzindo uma propriedade local). Tomando (IV-25)' e calculando o fluxo de ambos os membros através de uma superfície (aberta) S, diafragma de um contorno (fechado) [c],

$$\int_S \text{rot}\,\vec{H}\,.\,\vec{n}\,dS = \frac{1}{c}\int_S \vec{J}\,.\,\vec{n}\,dS\,,$$

obtém-se, atendendo ao teorema de Stokes(*) e à definição de intensidade de corrente (Cf. Cap. III, (III-3)):

$$\text{(IV-26)} \qquad \oint_{[c]} \vec{H}\,.\,\vec{ds} = \frac{1}{c}\,i_S\,.$$

(*) Recorde-se que o teorema de Stokes estabelece que o fluxo do rotacional de um campo vectorial $\vec{X}$ através de uma superfície S diafragma de um contorno (fechado) [c] iguala a circulação do campo $\vec{X}$ ao longo do contorno [c], sendo que o sentido do fluxo (o sentido das normais a S) e o sentido de circulação ao longo de [c] se acham relacionados pela regra de Stokes. Escreve-se:

$$\int_S \text{rot}\,\vec{X}\,.\,\vec{n}\,dS = \oint_{[c]} \vec{X}\,.\,\vec{ds}$$

sendo i_S a intensidade da corrente que passa através do diafragma S apoiado em $[c]$, no sentido relacionado pela regra de Stokes (*) com o sentido de circulação ao longo de $[c]$. Note-se que, dado o carácter solenoidal de rot $\vec{H}$, ou de $\vec{J}$, S pode ser qualquer diafragma (regular) apoiado sobre o contorno $[c]$. A relação (IV-26) traduz o teorema de Ampère.

Este teorema tem múltiplas aplicações. Pode ser utilizado designadamente para extrair o valor do campo $\vec{H}$ produzido por uma distribuição de corrente com propriedades de simetria tais que permitam prever a existência de linhas de força de forma conhecida e ao longo das quais o módulo do campo seja constante. (Obviamente, para chegar a uma previsão deste tipo torna-se necessário combinar as considerações de simetria com a lei de Biot-Savart.)

IV.4 — Campo magnético produzido por corrente estacionária em condutores filiformes

Abordemos agora o caso especial de o campo magnético ser produzido por corrente estacionária em condutores filiformes (V. § III.8.B, Cap. III). A importância deste estudo especial reside não só na ocorrência de numerosas aplicações práticas, como é bem conhecido, mas também no facto de que o tratamento teórico de certos problemas respeitantes ao campo magnético produzido por condutores extensos se faz mediante a decomposição destes condutores nos sistemas de tubos filiformes de linhas de força do campo $\vec{J}(Q)$, que os integram.

IV.4.1 — Campo produzido por um circuito filiforme (com corrente estacionária)

(*) V. Nota da Pág 57 (§ 6.4.2)

Notemos que um elemento de corrente num condutor filiforme pode ser assimilado a uma carga em movimento: a carga móvel que passa numa secção do condutor no tempo δt, ou seja, $\delta e = i\,\delta t$, animada da velocidade $\vec{v}$ que possui na corrente, está momentâneamente contida no elemento de circuito $\vec{\delta s} = \vec{v}\,\delta t$. Cumpre-se nestas condições a equivalência

$$(\text{IV-27}) \qquad i\,\vec{\delta s} = i\,\vec{v}\,\delta t = \delta e\,\vec{v}$$

que pode também exprimir-se por

$$(\text{IV-27})' \qquad i\,\vec{\delta s} = |\vec{J}|\,S\,\vec{\delta s} = \vec{J}\,\delta v \ .$$

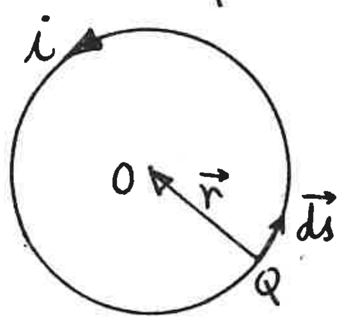
Então, a lei de Biot-Savart (IV-1) escreve-se para este elemento de circuito filiforme:

$$(\text{IV-28}) \qquad \delta\vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c}\, i\,\frac{\vec{\delta s}\wedge\vec{r}}{r^3} \qquad \begin{pmatrix} \vec{r} \equiv \vec{QP} \\ r = |\vec{r}| \end{pmatrix}$$

sendo Q a localização do elemento de corrente $i\,\vec{\delta s}$. Para um circuito filiforme fechado $[C]$, em corrente estacionária ($\underline{i}$ constante ao longo do circuito) teremos portanto:

$$(\text{IV-29}) \qquad \vec{B}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c}\, i \oint_{[C]} \frac{\vec{\delta s}\wedge\vec{r}}{r^3} \qquad \begin{pmatrix} \vec{r} \equiv \vec{QP} \\ r = |\vec{r}| \end{pmatrix}$$

como valor da indução magnética, $\vec{B}_P$, produzida no ponto P por todo o circuito. <u>Exemplo</u>: Calculemos, por (IV-29), a indução magnética produzida no centro de uma <u>espira circular</u> percorrida pela corrente estacionária $\underline{i}$ (v. Figura)



(espira circular)

Notando que, ao longo de todo o circuito, é sempre $\vec{ds} \perp \vec{r}$ e que estes dois vectores conservam a sua relação de sentido com uma semi-normal à espira — pode concluir-se, a partir de (IV-29) que a indução magnética no ponto O:

a) é perpendicular ao plano da espira ;

b) tem o sentido dado pela regra de Stokes, relativamente ao sentido de circulação da corrente na espira ;

c) e tem por módulo , $|\vec{B}_0|$:

$$|\vec{B}_0| = \frac{\mu_0}{4\pi c}\, i \oint \frac{|\vec{ds}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi c}\,\frac{i}{r^2}\oint |\vec{\delta s}| = \frac{\mu_0}{2c}\,\frac{i}{r}\,.$$

Se fôr $\vec{n}$ o vector unitário da orientação normal ao plano da espira e apontando para o leitor , então $\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2c}\frac{i}{r}\vec{n}$.

IV.4.2 — Acção de um campo magnético sobre um circuito filiforme (percorrido por corr. estacionária)

Para obter a forma assumida pela lei de Laplace para um elemento de circuito filiforme imerso num campo $\vec{B}(P)$ basta utilizar a relação de equivalência (IV-27) e substituir, em (IV-3), $\delta e\vec{v}$ por $i\vec{\delta s}$, vindo :

(IV-30)
$$\vec{\delta f} = \frac{i}{c}\,\vec{\delta s}\wedge\vec{B}\,.$$

Esta relação permite estudar a acção de um campo magnético sobre um circuito filiforme , no caso geral , mediante o exame do sistema das forças (IV-30) com que o campo $\vec{B}(P)$ actua sobre os diferentes elementos do circuito.

Assume particular interesse o caso de um circuito indeformável : o sistema de forças reduz-se então a uma resultante e um binário (com momento igual ao momento resultante do sistema). Se o circuito é percorrido por corrente estacionária (i constante ao longo do circuito) a resultante , $\vec{R}$, vem dada por

(IV-31)
$$\vec{R} = \frac{i}{c}\oint_{[c]} \vec{\delta s}\wedge\vec{B}$$

e o momento resultante relativamente a um ponto O fixado , $\vec{\Gamma}_0$, vem dado por

(IV-32)
$$\vec{\Gamma}_0 = \frac{i}{c}\oint_{[c]} \vec{OQ}\wedge(\vec{\delta s}\wedge\vec{B})\,.$$

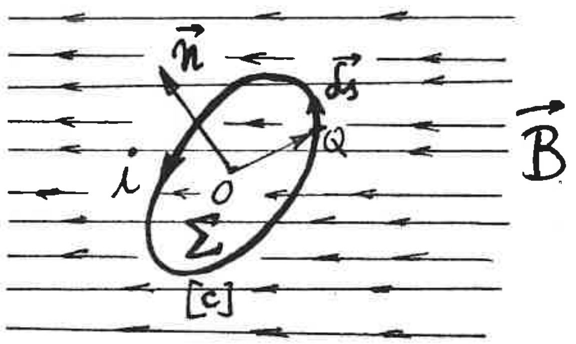
Se o campo $\vec{B}(P)$ é uniforme, a resultante $\vec{R}$ é nula $\left(\oint_{[c]} \vec{\delta s} = 0\right)$:

$$(\text{IV-33}) \qquad \vec{R} = \frac{i}{c}\left[\oint_{[c]} \vec{\delta s}\right] \wedge \vec{B} = 0$$

e o sistema de forças sobre o circuito reduz-se então a um binário. Mostra-se que o momento deste binário (momento resultante do sistema de forças, neste caso independente do ponto O em relação ao qual se calcula) pode exprimir-se sob a forma

$$(\text{IV-34}) \qquad \vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}, \quad \text{com } \vec{m} = \frac{i}{2c} \oint_{[c]} \vec{OQ} \wedge \vec{\delta s}$$

em que $\vec{m}$ é um vector (axial) apenas dependente das características geométricas do circuito e da corrente que o percorre (v. Fig.)



(espira num campo uniforme)

Conclui-se que o circuito sofre da parte do campo uma acção semelhante à que seria produzida pelo mesmo campo uniforme sobre um corpo magnetizado com um momento dipolar $\vec{m}$ (permanente). Pode designar-se $\vec{m}$ por <u>momento dipolar magnético</u> (<u>equivalente</u>) <u>do circuito</u>. Se o circuito é uma espira plana, vem, em particular, $\vec{m} = \frac{i\Sigma\vec{n}}{c}$, sendo Σ a área plana contida pela espira e $\vec{n}$ o vector unitário da orientação normal ao plano da espira com o sentido relacionado com a circulação da corrente, pela regra de Stokes. (v. Figura).

IV.4.3 — <u>Lei de Ampère para acções entre circuitos filiformes</u>

A partir das relações (IV-7) e (IV-7') e fazendo jogar a relação de equivalência (IV-27) obtêm-se fàcilmente as expressões das forças $\delta^2 f$ e $\delta^2 f'$ que se exercem entre elementos de circuitos filiformes, $i\vec{\delta s}$ e $i'\vec{\delta s}'$, $\delta^2 f$ aplicada em $i\vec{\delta s}$, $\delta^2 f'$ aplicada em $i'\vec{\delta s}'$:

(IV-35) $$\overrightarrow{\delta^2 f} = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\, i i' \,\overrightarrow{\delta s} \wedge \left(\overrightarrow{\delta s'} \wedge \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right), \quad (r = |\overrightarrow{PP'}|);$$

e uma expressão análoga para $\overrightarrow{\delta^2 f'}$.

Considerando os circuitos filiformes (fechados) [c] e [c'] nos quais se inserem os elementos de corrente $i\overrightarrow{\delta s}$ e $i'\overrightarrow{\delta s'}$, respectivamente, pode calcular-se a acção global do circuito [c'] sobre o elemento $i\overrightarrow{\delta s}$, bem como a acção global de [c] sobre $i'\overrightarrow{\delta s'}$, com algumas importantes reduções de que são susceptíveis as integrações cíclicas que aí intervêm, $\oint_{[c']}$ e $\oint_{[c]}$. É-se assim conduzido à <u>lei de Ampère das acções electrodinâmicas entre circuitos filiformes</u>. [Não nos ocuparemos aqui todavia do estudo pormenorizado deste assunto.]

Assume notável simplicidade o resultado que se obtém, em particular, para a resultante do sistema de forças exercidas por [c'] sobre [c], ou vice-versa, no caso de circuitos indeformáveis. Com efeito, tomando (IV-35) e desenvolvendo o duplo produto vectorial, vem:

(IV-36) $$\overrightarrow{\delta^2 f} = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2}\, i i' \left[\overrightarrow{\delta s'}\left(\overrightarrow{\delta s}\cdot \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right) - (\overrightarrow{\delta s}\cdot\overrightarrow{\delta s'}) \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right].$$

Então, a resultante $\vec{f}$, sobre [c], vale: $\left(\vec{f} = \oint_{[c]}\oint_{[c']} \overrightarrow{\delta^2 f}\right)$

(IV-37) $$\vec{f} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2}\, i i' \oint_{[c]}\oint_{[c']} (\overrightarrow{\delta s}\cdot\overrightarrow{\delta s'}) \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}$$

$\left(\text{porque } \oint_{[c]} \overrightarrow{\delta s}\cdot \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = 0\right)$. É obviamente mais complicado o resultado que se obtém para o momento resultante.

<u>IV. 4.4 — Algumas aplicações das propriedades gerais do campo magnético (produzido por corrente estacionária em circuitos filiformes)</u>

A. <u>Expressão do potencial-vector $\vec{A}$</u>

Fazendo jogar a relação de equivalência (IV-27)' (p. 175) sobre a definição (IV-19) (p. 168), obtém-se para o potencial-vector $\vec{A}$ do campo magnético produzido por um circuito filiforme (fechado) [c] percorrido por corrente estacionária, de intensidade $\underline{i}$, a expressão

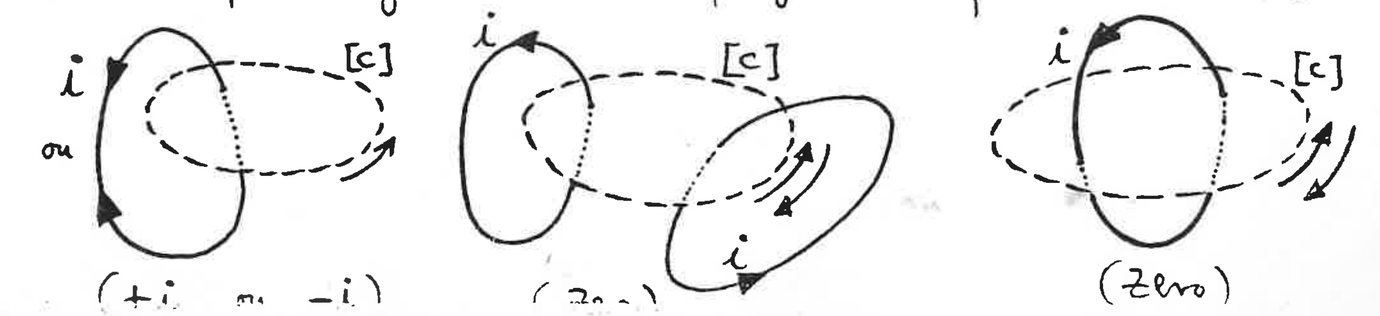
$$\text{(IV-38)} \qquad \vec{A}_P = \frac{\mu_0}{4\pi c}\, i \oint_{[c]} \frac{\vec{ds}}{r_{PQ}}$$

sendo $\vec{ds}$ o elemento de arco no ponto potenciante genérico Q, sobre [c], à distância r_{PQ} do ponto potenciado P. Como decorre do § IV.3.1, a aplicação de $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$ à expressão (IV-38) fornece (IV-29) (p. 175). Aproveitemos para pôr em realce que o potencial-vector $\vec{A}$, devido a um circuito filiforme, é directamente proporcional à intensidade da corrente que o percorre — como efeito directo do carácter estacionário da corrente. O campo $\vec{B}$ goza portanto da mesma propriedade, como já poderia ter-se observado junto da expressão (IV-29).

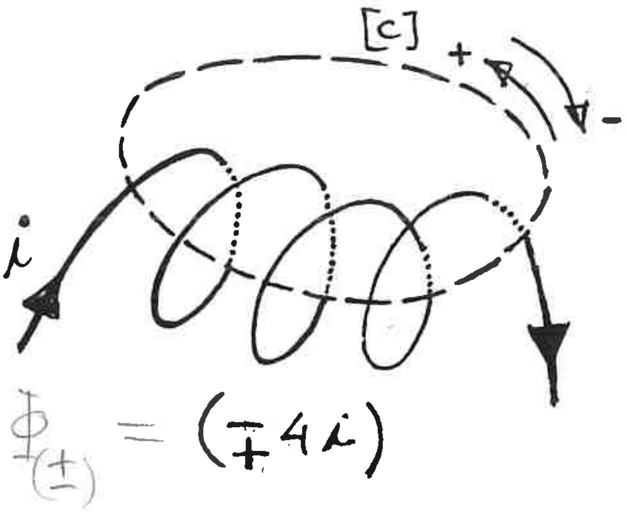
23/1/96

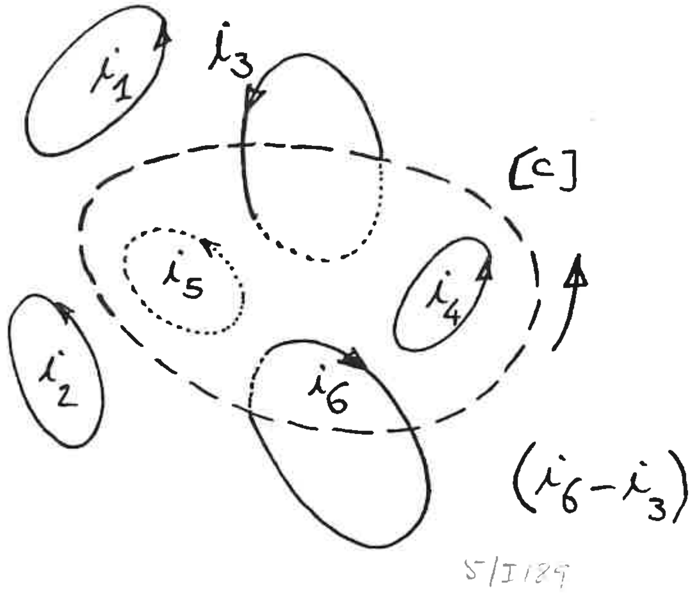
B. Exemplos de aplicação do teorema de Ampère

As figuras seguintes fornecem variados exemplos de aplicação do teorema de Ampère ao campo produzido por corrente estacionária em circuitos filiformes. Os valores dados nas legendas são os de $i_S = c \oint_{[c]} \vec{H} \cdot \vec{ds}$ para os respectivos casos (Cf. (IV-26), p. 173). O(s) circuito(s) é (são) sempre representado(s) a cheio, a curva fechada [c] figura-se a tracejado; deve sempre imaginar-se um diafragma S apoiado sobre [c].



(+i ou −i) (2i) (Zero)





5/I/89

C. Linhas de força do campo da induçaõ magnética produzido por um circuito filiforme, único no espaço (percorrido por corrente estacionária)

Referimos já que, sendo $\vec{B}(P)$ um campo de fluxo conservativo, as suas linhas de força fecham-se sobre si próprias. (Cf. § IV.3.1). Isto é uma consequência da 1ª propriedade fundamental do campo, $\operatorname{div} \vec{B} = 0$. Vejamos agora que a combinação desta mesma propriedade com a 2ª, $\operatorname{rot} \vec{H}' = 1/c\, \vec{J}'$, ou, mais directamente, com o teorema de Ampère (IV-26), p.173 — conduz à seguinte afirmaçaõ:

As linhas de força do campo da induçaõ magnética produzido pela corrente estacionária de um circuito filiforme único no espaço, (fechando-se sobre si próprias) passam todas necessàriamente por dentro do circuito [ou: vaõ todas necessàriamente abraçar o circuito]

Para demonstrar esta afirmaçaõ, vamos pôr em evidência que, se ela se não cumpre, isso viola alguma propriedade fundamental (método de reduçaõ ao absurdo). Seja, pois, por hipótese, uma linha de força [λ] que se fecha sobre si própria sem passar por dentro do circuito [sem abraçar o circuito [c]]. Entaõ, por um lado, o campo $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ tem òbviamente, sobre a linha de força, sempre a direcção da tangente; por outro lado, nunca o vector $\vec{H}$ pode mudar de sentido para um observador que caminha segundo a linha de força (porque, se isso acontecesse, o fluxo deixava de ser conservativo ao longo da linha de força — encarada como tubo de linhas de força de secção infinitamente pequena —). Donde resulta que, se fôr $\vec{d\lambda}$ o elemento de arco ao longo da linha de força num certo sentido de circulação, tem-se a circulação elementar $\vec{H}\cdot\vec{d\lambda}$ sempre do mesmo sinal ao longo de $[\lambda]$; e portanto, vem

$$\oint_{[\lambda]} \vec{H}\cdot\vec{d\lambda} \neq 0 \quad .$$

Mas, pelo teorema de Ampère, esta circulação deve igualar a corrente i_S que passa através de um qualquer diafragma S que se apoia sobre $[\lambda]$. Ora, nenhuma corrente atravessa efectivamente um diafragma apoiado sobre $[\lambda]$, porque, por hipótese, a linha de força $[\lambda]$ não passa por dentro do circuito [não abraça o circuito $[c]$] e o circuito $[c]$ é o <u>único no espaço</u> a produzir campo magnético: então, $i_S = 0$, o que viola o teorema de Ampère. Para levantar o absurdo, deve pois concluir-se que todas as linhas de força da indução magnética passam necessàriamente por dentro do circuito $[c]$, único no espaço.

IV.4.5 — Coeficientes de indução num sistema de condutores filiformes (com corrente estacionária)

Na descrição e interpretação das acções entre circuitos, desempenham um papel preponderante as relações entre as correntes e os fluxos de indução magnética. Importa considerá-las desde já; e é conveniente começar por examiná-las no caso simples de um sistema de condutores filiformes percorridos por corrente estacionária, em que se é conduzido à primeira noção de coeficientes de indução.

Seja um sistema de $\underline{n}$ condutores filiformes fechados $[c_\alpha]$, em posições fixas no espaço, percorridos por correntes estacionárias i_α, as quais produzem por todo o espaço um campo magnético global, de indução $\vec{B}(P)$. $(\alpha = 1, \dots, n)$.

Para cada circuito $[c_\alpha]$ se pode definir um fluxo de $\vec{B}$ através de um qualquer diafragma S_α apoiado sobre $[c_\alpha]$. À parte o sinal, esse fluxo tem o mesmo valor para qualquer um destes S_α, dado o carácter solenoidal do campo $\vec{B}$. Designando-o por Φ_α, tem-se:

$$(\text{IV}-39) \qquad \Phi_\alpha = \int_{S_\alpha} \vec{B} \cdot \vec{n}_\alpha \, dS_\alpha \qquad (\alpha = 1, \dots, n)$$

Escolhamos um sentido de circulação ao longo de cada circuito $[c_\alpha]$ e suponhamos que esta escolha (que era arbitrária) se fixa de uma vez para sempre. Adoptemos então, convencionalmente, para sentido do fluxo através de qualquer S_α, apoiado em $[c_\alpha]$, aquele que se encontra interligado com o sentido de circulação em $[c_\alpha]$ pela regra de Stokes. Nestas condições, correntes e fluxos passam a ter, neste sistema, carácter algébrico bem definido.

O fluxo Φ_α, definido por (IV-39), pode calcular-se também mediante

$$(\text{IV}-40) \qquad \Phi_\alpha = \oint_{[c_\alpha]} \vec{A} \cdot \vec{ds}_\alpha$$

tendo em conta que $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ e em resultado da aplicação da aplicação do teorema de Stokes a (IV-39).

Notemos que cada um dos circuitos $[c_\beta]$ produz um campo $\vec{B}_\beta(P)$, o qual deriva de um potencial-vector $\vec{A}_\beta(P)$ pela operação $\vec{B}_\beta = \text{rot}\,\vec{A}_\beta$ $(\beta = 1, \dots, n)$. O campo global $\vec{B}$ compõe-se a partir destes campos parcelares $\vec{B}_\beta$ por aditividade (Cf. § IV.1.4); e, tendo em conta a linearidade do operador $\underline{\text{rot}}$, também o potencial-vector global $\vec{A}$ se vai compor dos potenciais parcelares por aditividade. Tem-se:

$$(\text{IV}-41) \qquad \vec{B} = \sum_{\beta=1}^{n} \vec{B}_\beta \quad ; \quad \vec{A} = \sum_{\beta=1}^{n} \vec{A}_\beta .$$

Ao campo parcelar $\vec{B}_\beta$ corresponde um fluxo parcelar através de qualquer S_α apoiado sobre $[c_\alpha]$, que designaremos por $\Phi_\alpha^{(\beta)}$ e se escreve:

$$(\text{IV}-42) \qquad \Phi_\alpha^{(\beta)} = \int_{S_\alpha} \vec{B}_\beta \cdot \vec{n}_\alpha \, dS_\alpha = \oint_{[c_\alpha]} \vec{A}_\beta \cdot \vec{ds}_\alpha .$$

Tendo em conta a linearidade das operações de integração e as relações (IV-41), também o fluxo global se compõe dos fluxos parcelares por aditividade:

$$(\text{IV}-43) \qquad \Phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} \Phi_\alpha^{(\beta)} . \qquad (\alpha = 1, \dots, n)$$

Recordando agora que, pela lei de Biot-Savart, o campo parcelar $\vec{B}_\beta$ é proporcional à corrente i_β que o produz (Cf. (IV-29) p. 175) (o mesmo se passando com $\vec{A}_\beta$ (Cf. (IV-38) p. 179)) — segue-se de (IV-42) que <u>o fluxo parcelar $\Phi_\alpha^{(\beta)}$ é também proporcional a i_β, para qq. $[c_\alpha]$</u>.

A fim de explicitar esta última relação de proporcionalidade, comecemos por recordar a expressão de $\vec{A}_\beta(P)$:

$$(\text{Cf. (IV}-38)) \qquad \vec{A}_\beta(P) = \frac{\mu_0}{4\pi c} \, i_\beta \oint_{[c_\beta]} \frac{\vec{ds}_\beta}{r_{Q_\beta P}}$$

e introduzamo-la em (IV-42), com $P \equiv P_\alpha$ ponto genérico do circuito $[c_\alpha]$. Vem:

$$(\text{IV}-44) \qquad \Phi_\alpha^{(\beta)} = \left[\frac{\mu_0}{4\pi c} \oint_{[c_\alpha]} \oint_{[c_\beta]} \frac{\vec{ds}_\alpha \cdot \vec{ds}_\beta}{r_{Q_\beta P_\alpha}} \right] i_\beta$$

O coeficiente de proporcionalidade, entre parêntesis, apresenta-se habitualmente dividido por $\underline{c}$, constante electromagnética universal, reescrevendo-se (IV-44) na forma

$$(\text{IV}-44)' \qquad \frac{1}{c}\,\Phi_\alpha^{(\beta)} = L_{\alpha\beta}\, i_\beta \quad ,$$

com $L_{\alpha\beta}$ dado por (fórmulas de Neumann):

$$(\text{IV}-45) \qquad L_{\alpha\beta} = \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \oint_{[C_\alpha]} \oint_{[C_\beta]} \frac{d\vec{s}_\alpha \cdot d\vec{s}_\beta}{r_{Q_\alpha Q_\beta}} \quad .$$

Se inserirmos agora (IV-44)' em (IV-43), virá:

$$(\text{IV}-46) \qquad \frac{1}{c}\,\Phi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} L_{\alpha\beta}\, i_\beta \quad ;$$

o que traduz serem os fluxos Φ_α através dos n circuitos composições lineares das correntes i_α que os percorrem. Os coeficientes destas relações lineares entre os fluxos e as correntes designam-se por coeficientes de indução. Podem representar-se pelos $L_{\alpha\beta}$ $(\alpha,\beta = 1,\ldots,n)$, òbviamente.

O coeficiente $L_{\alpha\alpha}$ designa-se por coeficiente de self-indução ou coeficiente de indução própria do circuito $[C_\alpha]$. O coeficiente $L_{\alpha\beta}$ $(\beta \neq \alpha)$ designa-se por coeficiente de indução mútua entre os circuitos $[C_\alpha]$ e $[C_\beta]$.

Quanto ao significado físico destes coeficientes, pode aproveitar-se a relação (IV-44)' para dizer que, à parte o factor c, $L_{\alpha\beta}$ representa o fluxo da indução $\vec{B}$ que atravessa S_α (q.q. diafragma apoiado sobre $[C_\alpha]$) quando se supõem nulas todas as correntes, à excepção de i_β tomada igual à unidade de corrente.

25/4/90

Vejamos agora as propriedades que podem ser atribuidas aos coeficientes de indução de um sistema de n condutores filiformes, nas condições acima referidas.

A. Em primeiro lugar, as fórmulas de Neumann, (IV-45), (além de confirmarem a independência dos coeficientes $L_{\alpha\beta}$ a respeito das correntes i_α) mostram que, posto de parte o factor electromagnético constante μ_0/c^2, os $L_{\alpha\beta}$ são coeficientes que dependem essencialmente das características geométricas do sistema dos n circuitos, a saber: das suas dimensões, da sua forma, das suas posições relativas, em suma, da configuração geométrica do sistema.

B. As fórmulas de Neumann permitem ainda ver que nelas nada se altera quando se realiza a troca de α com β, donde resulta

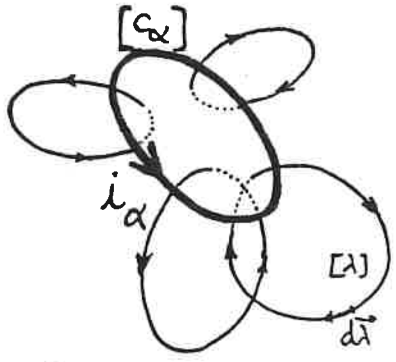
(IV-47) $$L_{\alpha\beta} = L_{\beta\alpha} .$$

A matriz $(n \times n)$ dos coeficientes $L_{\alpha\beta}$ é uma matriz simétrica.

C. Consideremos agora o estado estacionário em que só i_α é diferente de zero e todas as outras correntes se supõem nulas. Então por (IV-44)', vem $L_{\alpha\alpha} = \frac{1}{c}\,\Phi_\alpha^{(\alpha)}/i_\alpha$. Porque se trata de uma situação de circuito único no espaço, pode aplicar-se o estudo feito no § IV.4.4-C: todas as linhas de força do campo da indução vão necessàriamente passar por dentro do circuito $[C_\alpha]$. Reparemos então que o sentido das linhas de força deve ser tal que para todas elas se cumpra

$$\oint_{[\lambda]} \vec{H}\cdot d\vec{\lambda} = \frac{1}{c}\, i_\alpha ,$$

pelo que devem fazer todas a mesma interligação do sentido com o sentido da corrente i_α em $[C_\alpha]$, sendo essa interligação regida pela regra de Stokes. Então o sinal algébrico de $\Phi_\alpha^{(\alpha)}$ tem que ser o mesmo que o de i_α donde resulta: $L_{\alpha\alpha} > 0$. Em conclusão:



(Linhas de força de $\vec{B}$ no caso de circuito $[C_\alpha]$ único no espaço)

Os coeficientes de indução própria, $L_{\alpha\alpha}$ (q.q. α), são essencialmente positivos.

D. Continuando a considerar o mesmo estado estacionário, vejamos que o facto de todas as linhas de força passarem por dentro do contorno $[C_\alpha]$ acarreta uma outra consequência importante: o fluxo através do contorno $[C_\alpha]$, por ser o fluxo através de uma secção transversal do tubo de linhas de força que comporta todas as linhas de força é o máximo fluxo que se pode atingir neste campo através de qualquer contorno (em valor absoluto). Donde resulta $|\Phi_\beta^{(\alpha)}| \leqslant |\Phi_\alpha^{(\alpha)}|$, com $\beta \neq \alpha$. Mas, por (IV-44)', tem-se $\Phi_\beta^{(\alpha)} = c\, L_{\beta\alpha}\, i_\alpha$ e $\Phi_\alpha^{(\alpha)} = c\, L_{\alpha\alpha}\, i_\alpha$; extrai-se, portanto, a seguinte propriedade:

$$|L_{\alpha\beta}| \leqslant L_{\alpha\alpha} \qquad (\beta \neq \alpha) \tag{IV-48}$$

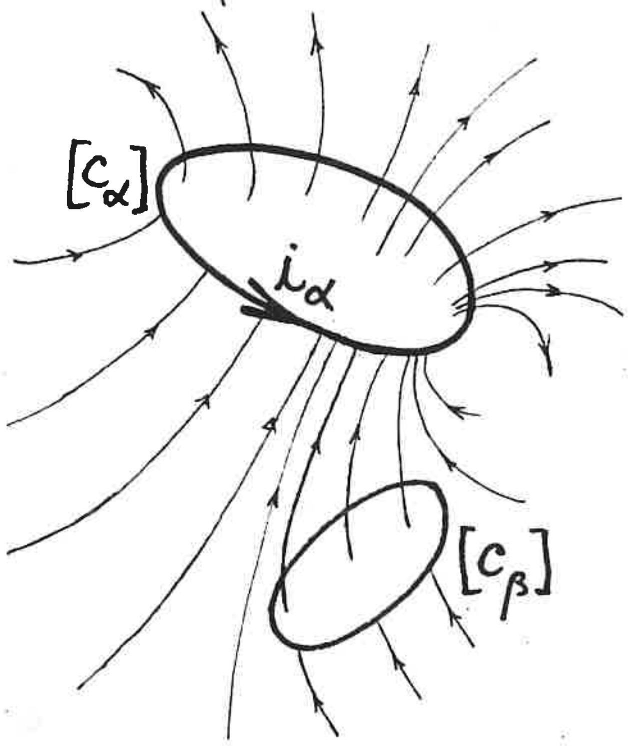
$|L_{\beta\alpha}| \leqslant L_{\beta\beta}$

Como corolário de (IV-48), tem-se

$$L_{\alpha\beta}^2 \leqslant L_{\alpha\alpha}\, L_{\beta\beta} \qquad (\beta \neq \alpha) \tag{IV-49}$$

$|L_{\alpha\beta}| \leqslant L_{\beta\beta}$

[Esta última relação prende-se com o carácter essencialmente positivo da energia magnética de um sistema de condutores filiformes percorridos por correntes estacionárias, a qual é dada por $W_m = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} L_{\alpha\beta}\, i_\alpha\, i_\beta$.]



(A Figura ilustra o caso de um contorno em que a condição $|\Phi_\beta^{(\alpha)}| < |\Phi_\alpha^{(\alpha)}|$ se cumpre flagrantemente; e isso corresponde a uma situação corrente. A situação de igualdade dos fluxos verificar-se-ia para o caso de um contorno $[C_\gamma]$, com a forma de $[C_\alpha]$, e quase em coincidência com o condutor $[C_\alpha]$.)

CAP. IV — CAMPO MAGNÉTICO

2ª Parte : CAMPO MAGNÉTICO DOS ÍMANS

IV.5 — Introdução

Os fenómenos magnéticos devidos aos ímans e aos corpos magnetizados por influência são conhecidos desde a Antiguidade; o uso da bússola de orientação é muito recuado nos tempos. Todavia, e embora tivessem sido objecto de interessantes experiências no princípio do séc. XVII (*), estes fenómenos só adquiriram verdadeiro significado quantitativo no último quartel do séc. XVIII, com os trabalhos de Coulomb (à volta de 1785).

Para explicar as propriedades dos corpos magnéticos, os físicos foram inicialmente levados a admitir a existência nesses corpos de cargas positivas e negativas, « sui generis », mas gozando de propriedades análogas às das cargas eléctricas no tocante às suas acções mútuas. Tais cargas foram designadas por cargas magnéticas; e Coulomb encontrou para as acções entre cargas magnéticas uma lei de todo idêntica à lei das acções entre cargas eléctricas em repouso (lei de Coulomb).

Os factos experimentais não permitiram contudo que se chegasse a precisar a noção de massas magnéticas livres, com existência como cargas verdadeiras, na medida em que não conduziram à possibilidade de separar e de isolar, num corpo magnético,

---

(*) Um exemplo notável: Gilbert, à volta de 1600, concebeu que a Terra podia assimilar-se a um íman gigante, ao qual devia atribuir a existência do campo magnético terrestre; e, tendo magnetizado uma esfera de ferro, mostrou que o campo magnético em torno desta esfera era semelhante ao campo magnético em torno da Terra.

qualquer massa magnética efectiva, como superavit de carga positiva ou negativa. (Recorde-se como uma semelhante separação é perfeitamente realizável com cargas eléctricas, em experiências com condutores sob influência electrostática, p. ex).

Dois tipos de experiências simples, fundamentais, levaram em contrapartida a conceber os corpos magnéticos como meios di-polarizados, com carga magnética total nula.

(I). Um íman apresenta-se aparentemente como detentor de cargas magnéticas de sinais contrários, grosso modo concentradas em duas regiões disjuntas — o polo Norte e o polo Sul — e com uma região neutra de permeio. E' natural que tenha surgido a ideia de tentar separar as cargas positivas das negativas por meio de um corte praticado na região neutra. Mas uma experimentação exaustiva revela ser essa ideia absolutamente vã: por mais que se subdivida, a divisão de um íman origina sempre dois novos ímans, cada um dos quais de novo, aparentemente, com cargas magnéticas dos dois sinais concentradas nos dois polos. Em conclusão: Um íman é essencialmente um meio di-polarizado.

(II). Por outro lado, as observações sobre o comportamento de um qualquer íman (de não importa que dimensões), quando imerso num campo magnético uniforme, revelam a inexistência de qualquer acção efectivamente capaz de produzir um deslocamento translaccional do íman: a resultante das forças actuantes é nula e o íman fica sempre submetido sòmente a um binário que se traduz em rotação. Sendo assim, tem que concluir-se: Um íman tem carga total nula.

Reunindo as conclusões destas experiências, podemos dizer que toda a ínfima fracção de um íman se revela no seu comportamento como um dipolo magnético. Os dipolos magnéticos serão assim as entidades básicas na descrição dos fenómenos magnéticos. Na verdade somos levados a formular como um princípio de interpretação dos fenómenos magnéticos a <u>não existência de cargas magnéticas verdadeiras</u>.

É-se desta maneira conduzido a encarar cada corpo magnético, à escala macroscópica, como <u>constituído por uma distribuição contínua de dipolos magnéticos</u>, à semelhança do que se passa com os dieléctricos polarizados na Electrostática. Caracteriza-se, em consequência, o estado magnético do corpo por meio de um vector $\vec{M}$, dito <u>magnetização</u>, definido em cada ponto P (analogamente ao vector <u>polarização</u> de um dieléctrico) por:

$$\vec{M} = \frac{\delta \vec{m}}{\delta v} \qquad \left[\vec{M} \equiv \vec{M}(P)\right] \qquad (\boxed{IV}-50)$$

sendo $\delta\vec{m}$ o momento(*) (magnético) do dipolo magnético infinitamente pequeno que afecta o elemento de volume infinitamente pequeno, δv, circunvizinho ao ponto P. Trata-se de uma densidade volúmica da distribuição de dipolos magnéticos que constitui o corpo magnetizado. Suporemos que, em todos os casos, esta função de ponto $\vec{M}(P)$ é finita, unívoca e contínua.

Com base na lei de Coulomb para as acções mútuas entre cargas magnéticas (que sempre podem ser idealizadas) — e porque esta lei é idêntica à lei de Coulomb da Electrostática —, torna-se possível construir uma Magnetostática à semelhança da Electrostática, mais precisamente uma teoria do magnetismo dos ímans formalmente análoga à ~~teoria~~ dos dieléctricos polarizados. Adiante recorreremos a esta analogia.

No quadro desta analogia formal convém desde já, em particular, pôr em realce as relações que exprimem ~~o~~ comporta-

(*) (com definição análoga à do momento de um dipolo eléctrico na Electrostática) mento da entidade básica — dipolo magnético. Por um lado, o campo magnético (representemo-lo pela indução $\vec{B}_P$) produzido por um dipolo magnético de momento $\vec{m}$ é susceptível de se escrever como (*)

(IV-51) $$\vec{B}_P = -\mathrm{grad}_P V_m \quad , \text{ com } V_m = -k_0' \, \vec{m} \cdot \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}$$

(Cf. (1-49), p. 47). Por outro lado, um dipolo magnético de momento $\vec{m}$, imerso num campo magnético uniforme, de indução $\vec{B}$, fica submetido a um binário cujo momento resultante vale

(IV-52) $$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

IV.6 — Correntes moleculares de Ampère

IV.6.1 — A concepção de Ampère

Apesar da analogia formal das explicações dos fenómenos eléctricos e magnéticos até então atingidas, o Magnetismo mantinha-se ainda no princípio do séc. XIX como um domínio da Física completamente independente da Electricidade.

As descobertas de Oersted (1820) revelando o campo magnético produzido pelas correntes puseram em flagrante evidência que um elo profundo liga o magnetismo à electricidade. Pela tendência natural para unificar as leis da Física, desde logo se desenvolveram tentativas no sentido de reunir os dois domínios do conhecimento numa concepção única. Admitida a não existência de cargas magnéticas verdadeiras, como a experiência fortemente sugeria, restava como única via compa-

(*) Como habitualmente, $r = |\vec{OP}|$, sendo O a posição do dipolo $\vec{m}$ e P o ponto potenciado. A constante k_0' revela-se depois igual a $\mu_0/4\pi$.

tível interpretar os fenómenos magnéticos com base nas leis que regem os fenómenos eléctricos (ou seja, reduzir o magnetismo à electricidade). É neste quadro que surge a concepção de Ampère.

Fundado nas descobertas de Oersted e guiado pelas suas próprias experiências sobre as interacções das correntes, Ampère (em 1823) emitiu a hipótese especulativa de que as propriedades magnéticas dos ímans poderiam explicar-se admitindo a existência de <u>correntes eléctricas particulares</u> associadas às moléculas constituintes desses corpos. Estas <u>correntes particulares</u> não desenvolveriam calor de Joule nem exigiriam qualquer força electromotriz para conservar o fluxo de cargas eléctricas, em circuitos fechados, a uma escala microscópica. Adviriam de movimentos materiais das partículas electrizadas ~~de cargas eléctricas~~, inerentes à própria constituição do corpo, e como tal produziriam campo magnético.

Esta concepção de Ampère não tardou a ser aceite e revelou-se fecunda. Retomada por Weber e por Lord Kelvin, veio mais tarde a ser precisada e desenvolvida por Langevin (em 1905) e subsiste no quadro da teoria atomico-molecular da matéria. Dentro desta teoria, e numa imagem clássica, cada electrão que descreve uma órbita num edifício atómico ou molecular constitui, pelo seu próprio movimento, uma <u>corrente particular</u> com as características requeridas na concepção de Ampère(*), ou como passou a dizer-se, uma <u>corrente molecular de Ampère</u>. Ora, como vai provar-se no parágrafo

---

(*) Note-se que a não libertação de calor de Joule pelas <u>correntes particulares</u> — que está de harmonia com os factos experimentais, pois <u>um íman não dimana calor</u> — tem neste quadro uma justificação perfeitamente razoável: no seu movimento orbital o electrão não entra em colisões.

(IV. 6. 3), uma tal corrente molecular é equivalente a um dipolo magnético, quer do ponto de vista do campo magnético que produz quer do ponto de vista da acção que sofre quando colocado num campo magnético exterior.

Deve notar-se que o momento do dipolo magnético equivalente se acha directamente relacionado com o momento angular do electrão no seu movimento orbital; e esta observação permite entender que o spin do electrão — momento angular intrínseco, cuja descrição só é acessível no quadro da Mecânica Quântica — também possa assimilar-se a uma corrente molecular de Ampère.
[A consideração dos momentos magnéticos de spin é essencial na interpretação dos fortes efeitos que se manifestam com os materiais ferromagnéticos, por exemplo.]

As diversas correntes moleculares associadas aos electrões de um átomo, de um ião ou de uma molécula contrabalançam entre si os seus efeitos, produzindo-se um resultado global que se determina pela composição vectorial dos respectivos momentos dipolares magnéticos. Consoante a estrutura electrónica do sistema, da qual depende fortemente, o efeito resultante pode ser nulo, como se verifica em muitos casos, ou pode traduzir-se na existência de um momento dipolar magnético (total) do átomo, do ião, ou da molécula, como se verifica noutros casos. Note-se entretanto que a composição das correntes moleculares num sistema isolado pode ser significantemente alterada pela actuação de um campo magnético exterior que modifica as características dos movimentos orbitais dos electrões — gerando-se assim um momento dipolar magnético induzido, proeminente nos casos em que o sistema não possui momento dipolar magnético permanente.

Dentro de cada elemento de volume de um corpo, haverá pois eventualmente miríades de dipolos magnéticos atómicos ou moleculares que, no seu conjunto, originam um momento dipolar magnético, efectivo, para o elemento de volume, à escala macroscópica — cujo valor deverá procurar-se por adequado tratamento estatístico. A concepção de Ampère permite assim explicar que os corpos magnetizados ou os ímans possam ser descritos, para os diversos efeitos experimentais, como constituídos à escala macroscópica, por uma distribuição contínua de dipolos magnéticos, tal como se refere no § IV.5.

IV.6.2 — Assimilação de uma corrente molecular de Ampère a um circuito filiforme de corrente estacionária.

Imaginemos, numa perspectiva clássica, um electrão ligado que descreve uma órbita num edifício atómico-molecular com um período de revolução τ (cuja ordem de grandeza pode estimar-se em 10^{-15} segundo). Admitamos que um observador hipotético, localizado num ponto da órbita, pretende medir a quantidade de electricidade que passa nesse ponto por unidade de tempo; e analisemos o resultado que obtém.

O intervalo de tempo de observação não pode ser reduzido abaixo de um limiar Δt, que, por muito pequeno que seja, é ainda muito maior que τ. Suponhamos ser N o número de vezes, muito grande, que τ cabe em Δt: teremos então $\Delta t \cong N\tau$ com um êrro relativo muito inferior à unidade. Ora, durante o tempo Δt produzem-se N passagens do electrão e o observador detecta portanto a passagem de uma carga $\Delta q = Ne$ e <u>mede</u> uma intensidade de corrente

$$i = \frac{\Delta q}{\Delta t} \cong \frac{Ne}{N\tau} = \frac{e}{\tau} \qquad \text{(IV-53)}$$

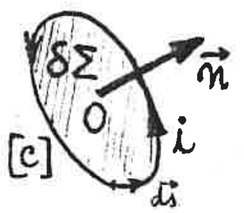
Mas, por idênticas considerações, a mesma intensidade mediria o observador em qualquer outro intervalo de tempo de observação e em qualquer outro ponto da órbita. Tudo se passa como se o movimento orbital do electrão se traduzisse por uma corrente de intensidade constante no tempo e com o mesmo valor em todos os pontos da órbita.

A corrente molecular constituída pelo movimento orbital do electrão é pois assimilável a uma corrente estacionária num circuito filiforme. Com base nesta assimilação se desenvolve o § seg..

26/11/90

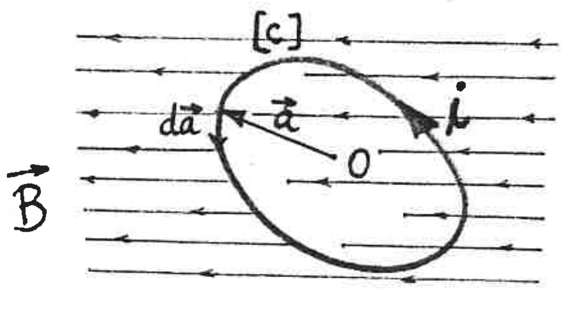
IV.6.3 — Equivalência de uma corrente molecular de Ampère a um dipolo magnético

Admitiremos que uma corrente molecular de Ampère é assimilável a um circuito filiforme (fechado), [c], com dimensões infinitamente pequenas, percorrido por uma corrente estacionária $\underline{i}$. (As dimensões são efectivamente microfísicas; o circuito pode supor-se plano). Seja $\underline{\delta\Sigma}$ a área do diafragma plano apoiado sobre [c]. O versor $\vec{n}$ da semi-normal a



$\underline{\delta\Sigma}$, de sentido relacionado pela regra de Stokes com um sentido de circulação pré-fixado sobre [c], descreverá a orientação da corrente molecular. Designemos por $\vec{a}$ o vector posição do elemento genérico $i\,\vec{ds}$ do circuito, referido a um ponto $\underline{O}$ fixo sobre $\underline{\delta\Sigma}$ $(\vec{ds} \equiv d\vec{a})$.

IV.6.3.A — Acção de um campo magnético sobre uma corrente molecular de Ampère



Suponhamos a corrente molecular imersa num campo magnético $\underline{\text{uniforme}}$, de indução $\vec{B}$; e estudemos o sistema de forças a que fica submetida, tratando-a como se fosse um circuito indeformável. Este problema foi já tratado no § IV.4.2, pag 176–177 e os resultados podem resumir-se nos seguintes termos: (a) a resultante $\vec{R}$ do sistema de forças é nula e o sistema de forças reduz-se a um binário; (b) o momento deste binário, que pode calcular-se relativamente a qualquer ponto, vale

$$\vec{\Gamma} = \left[\frac{i}{2c} \oint_{[c]} \vec{a} \wedge d\vec{a}\right] \wedge \vec{B} \tag{IV-54}$$;

(c) $\vec{\Gamma}$ pode exprimir-se então sob a forma

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} \tag{IV-55}$$, com:

$$\vec{m} = \frac{i}{2c} \oint_{[c]} \vec{a} \wedge d\vec{a} \tag{IV-56}$$;

(d) conclui-se que o circuito [c] sofre da parte do campo uma acção semelhante à que seria produzida pelo mesmo campo uniforme sobre um dipolo magnético de momento $\vec{m}$, em conformidade com a expressão (IV-52); (e) no caso em estudo, o valor do $\oint_{[c]} \vec{a} \wedge d\vec{a}$ é, como fàcilmente se reconhece, $2\,\delta\Sigma\,\vec{n}$; e

$$\vec{m} = \frac{i\,\delta\Sigma\,\vec{n}}{c} \tag{IV-57}$$.

Para a demonstração do resultado (IV-54) podem adoptar-se os seguintes passos:

(1) O momento resultante $\vec{\Gamma}$, calculado relativamente ao ponto $\underline{O}$ tem por expressão: $\vec{\Gamma} = \frac{i}{c} \oint_{[c]} \vec{a} \wedge (d\vec{a} \wedge \vec{B})$ (cf. (IV.32)).

(2) Sabe-se que $\vec{a} \wedge (d\vec{a} \wedge \vec{B}) = d\vec{a}\,(\vec{a} \cdot \vec{B}) - \vec{B}\,(\vec{a} \cdot d\vec{a})$

(3) O 2º termo do 2º membro é uma diferencial exacta:

$$\vec{B}\,(\vec{a} \cdot d\vec{a}) = \vec{B}\, d\left(\tfrac{1}{2}\vec{a}^2\right) = d\left[\left(\tfrac{1}{2}\vec{a}^2\right)\vec{B}\right],$$

com integral cíclico nulo.

(4) Para o 1º termo, observe-se que é possível aproveitar as suas duas expressões alternativas, que seguem

$$(\mathrm{I}) \qquad d\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{B}) = (\vec{a}\wedge d\vec{a})\wedge\vec{B} + \vec{a}\,(\vec{B}\cdot d\vec{a})$$

$$(\mathrm{II}) \qquad d\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{B}) = d\left[\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{B})\right] - \vec{a}\,(\vec{B}\cdot d\vec{a})$$

e calcular artificiosamente esta quantidade pela semi-soma de (I) com (II):

$$d\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{B}) = \frac{1}{2}\left\{(\vec{a}\wedge d\vec{a})\wedge\vec{B} + d\left[\vec{a}\,(\vec{a}\cdot\vec{B})\right]\right\}$$

(5) A circulação fechada da diferencial exacta $d[\vec{a}(\vec{a}\cdot\vec{B})]$ é nula. Donde resulta (IV-54).

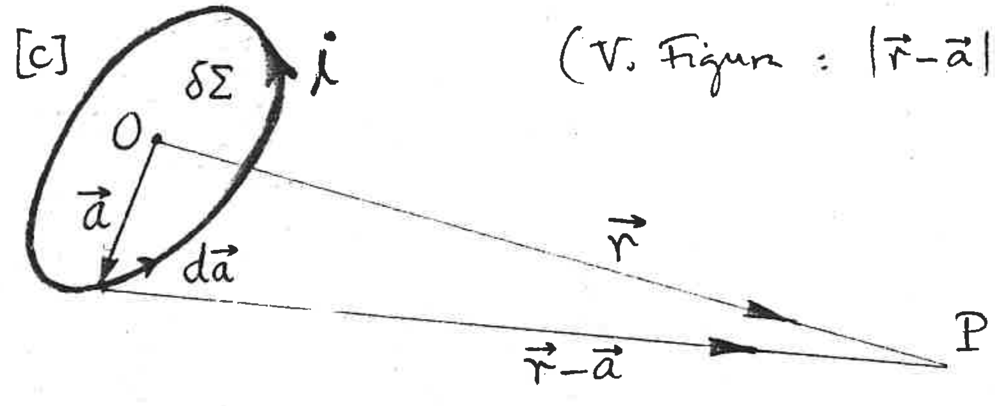
Em suma, do ponto de vista da acção que sofre quando colocada num campo magnético uniforme, uma corrente molecular de Ampère, com características $\underline{i}$, $\underline{\delta\Sigma}$, $\vec{n}$ (intensidade, área, orientação), revela-se equivalente a um dipolo magnético de momento $\vec{m} = i\,\delta\Sigma\,\vec{n}/c$. ((IV.57)).

11/2/89

IV.6.3.B — Campo magnético produzido por uma corrente molecular de Ampère em pontos exteriores.

Seja P o ponto genérico do espaço, onde se localiza o observador. O potencial-vector produzido em P pelo circuito [c] (de corrente estacionária) (Cf. (IV-38), pag 179) vem dado por:

$$(\mathrm{IV}\text{-}58) \qquad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\, i \oint_{[c]} \frac{d\vec{a}}{|\vec{r}-\vec{a}|} \qquad (\vec{r} = \vec{OP})$$



(V. Figura: $|\vec{r}-\vec{a}| = r_{PQ}$)

Demonstra-se que, nas condições específicas do circuito [c] ($|\vec{a}| << |\vec{OP}|$), a expressão (IV-58) é susceptível do seguinte cálculo aproximado:

(IV-59) $$\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{i}{2c}\oint_{[c]} \vec{a}\wedge d\vec{a}\right]\wedge\frac{\vec{r}}{r^3}$$

A demonstração pode fazer-se com os seguintes passos:

(1) $$|\vec{r}-\vec{a}|^{-1} = (r^2+a^2-2\vec{a}.\vec{r})^{-1/2} = r^{-1}\left(1+\frac{a^2}{r^2}-2\,\frac{\vec{a}.\vec{r}}{r^2}\right)^{-1/2};$$

e, por ser $|\vec{a}| << |\vec{r}|$ ($|\vec{a}|$ é uma dimensão microfísica), desprezando os termos da ordem de grandeza $(|\vec{a}|/|\vec{r}|)^n$ com $n \geqslant 2$, vem, dentro de uma muito boa aproximação:

$(1+x)^n \cong 1+nx$

$$|\vec{r}-\vec{a}|^{-1} \cong r^{-1}\left(1+\frac{\vec{a}.\vec{r}}{r^2}\right).$$

(2) Substituindo em (IV-58), tem-se

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\, i\left[\frac{1}{r}\oint_{[c]} d\vec{a} + \frac{1}{r^3}\oint_{[c]}(\vec{a}.\vec{r})\,d\vec{a}\right]$$

em que se deve desde logo notar que o 1º termo é nulo.

(3) Para o 2º termo, segue-se um caminho idêntico ao seguido em (4), pág. 196, mudando $\vec{B}$ em $\vec{r}$; vem:

$$\oint_{[c]}(\vec{a}.\vec{r})\,d\vec{a} = \frac{1}{2}\oint_{[c]}(\vec{a}\wedge d\vec{a})\wedge\vec{r}$$

Obtém-se portanto (IV-59).

Recordando agora a definição (IV-56), vem para (IV-59) a expressão $\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{m}\wedge\frac{\vec{r}}{r^3}$, ou seja:

(IV-60) $$\vec{A}(\vec{r}) \cong -\frac{\mu_0}{4\pi}\,\vec{m}\wedge \mathrm{grad}_P\,\frac{1}{r}.$$

O campo $\vec{B}$ calcula-se pela operação $\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A}$ (Cf. § IV.3.1) e resulta

(IV-61) $$\vec{B} \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\, \text{grad}_P \left(\vec{m} \cdot \text{grad}_P \frac{1}{r} \right)$$

Para efectuar esse cálculo, note-se que $\text{rot}_P\, \vec{m} = 0$ ($\vec{m}$ só depende das características do circuito [c]), o que permite escrever $-\vec{m} \wedge \text{grad}_P \frac{1}{r} = \text{rot}_P \left(\frac{\vec{m}}{r}\right)$, utilizando uma conhecida identidade diferencial. Então:

$$\vec{B} = \text{rot}\,\vec{A} \cong \frac{\mu_0}{4\pi}\, \text{rot}\,\text{rot}\left(\frac{\vec{m}}{r}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\frac{\vec{m}}{r}\right) - \vec{\nabla}^2\left(\frac{\vec{m}}{r}\right)\right)$$

Ora: (a) $\vec{\nabla}^2\left(\frac{\vec{m}}{r}\right) = \vec{m}\; \vec{\nabla}_P^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

(b) $\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{\vec{m}}{r}\right) = \vec{m}\cdot \text{grad}_P \frac{1}{r}$, porque $\text{div}_P\, \vec{m} = 0$.

Obtém-se portanto (IV-61).

Ao resultado (IV-61) pode dar-se a versão:

(IV-62) $$B_P = -\,\text{grad}_P V_m \quad , \quad V_m = -\frac{\mu_0}{4\pi}\left(\vec{m}\cdot \text{grad}_P \frac{1}{r}\right).$$

Em conformidade com (IV-51), isto significa que:

Do ponto de vista do campo magnético que produz em pontos exteriores, uma corrente molecular de Ampère revela-se equivalente a um dipolo magnético de momento $\vec{m}$ definido por (IV-56). Se as características da corrente molecular (intensidade, área, orientação) são i, $\delta\Sigma$, $\vec{n}$ então $\vec{m}$ vem dado por $\vec{m} = i\,\delta\Sigma\,\vec{n}/c$ (Cf. (IV-57)).

Comprovada a equivalência de uma corrente molecular de Ampère a um dipolo magnético de momento $\vec{m}$, sob os dois fundamentais pontos de vista adoptados em IV.6.3A e IV.6.3B, pode recorrer-se a esta concepção para o estudo do campo magnético dos ímans; este momento $\vec{m}$, dado por (IV-57), passa a designar-se por momento dipolar magnético da corrente molecular de Ampère.

IV.7 — Campo magnético produzido por um Corpo magnetizado

Para o estudo do campo magnético produzido por um corpo magnetizado podem seguir-se duas vias distintas:

Via I : Encara-se o corpo magnetizado como análogo a um dieléctrico polarizado e adapta-se ao domínio do campo magnético dos ímans o tratamento do campo eléctrico na Electrostática dos dieléctricos polarizados.

Via II : Adopta-se a concepção das correntes moleculares de Ampère para descrever a distribuição contínua de dipolos que constitui o corpo magnetizado e trata-se o campo dos ímans como um campo magnético das correntes.

Em qualquer caso, considera-se um corpo magnetizado que se caracteriza por uma magnetização $\vec{M}(Q)$, suposta conhecida em cada ponto Q do volume $\underline{v}$ do corpo.

Na via II descreveremos o campo com a ajuda do vector indução magnética, que continuaremos a designar por $\vec{B}$. Na via I descreveremos o campo com a ajuda do vector $\vec{H}$, campo magnético, já referido no § IV.3.3.

Para pontos exteriores ao corpo magnetizado, os campos encontrados pelas duas vias são absolutamente idênticos, o que se traduz pela relação de proporcionalidade

(IV-63) $$\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$$

entre a indução magnética $\vec{B}$ (via II) e o campo magnético $\vec{H}$ (via I), sendo μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo. São bem conhecidas as propriedades e a significação física destes campos.

Entretanto, para os pontos interiores ao corpo magnetizado (interiores à magnetização), os dois campos diferem um do outro, essencialmente — e importa averiguar como se relacionam, que propriedades possuem, que significação física se lhes deve atribuir.

29/11/90

IV.7.1 — Recurso à analogia com a Electrostática (via I)

Tratando o corpo magnetizado como uma distribuição de dipolos magnéticos em analogia com a distribuição contínua de dipolos eléctricos de um dieléctrico polarizado, o potencial escalar magnético produzido num ponto P virá dado pela expressão

(IV-64) $$V_m(P) = k'_0 \int_v \left(\vec{M} \cdot \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right) dv \qquad (r = |\vec{PQ}|)$$

que é inteiramente análoga a (1.125'), pag 114 (*). O campo calcula-se pela operação (análoga à que dá $\vec{E}$, pag 114):

(IV-65) $$\vec{H} = -\operatorname{grad} V_m \quad .$$

Tal como na Electrostática, (IV-64) e (IV-65) são extensíveis aos pontos interiores ao corpo magnetizado. Fica portanto sempre assegurado o carácter irrotacional de $\vec{H}$:

(IV-66) $$\operatorname{rot} \vec{H} = 0 \quad .$$

Podemos transpor para este domínio as conclusões essenciais da discussão que foi feita sobre o campo eléctrico — de que $\vec{H}$ é

(*) Note-se que se tem todavia $k'_0 = 1/4\pi$ e não $k'_0 = 1/4\pi\mu_0$; isso deve-se à diferença entre as definições de cargas eléctricas e de 'massas magnéticas'. (Confronte as expressões das duas leis de Coulomb) análogo — na Electrostática dos dieléctricos polarizados. Faremos no entanto a reserva de que não se considera aqui a existência de cargas magnéticas verdadeiras, como já foi referido no § IV.5; a magnetização é devida à influência de campos magnéticos de correntes ou de outros ímans, sendo ainda de considerar a magnetização eventualmente inerente ao próprio corpo magnetizado — que subsiste na ausência de campo magnético exterior.

IV.7.1.A — Distribuição equivalente de Poisson

Por um tratamento formalmente idêntico ao apresentado no § 9.4.2, pag 114-115, pode obter-se para $V_m(P)$, a partir de (IV-64), a seguinte nova forma de expressão:

$$(\text{IV-67}) \qquad V_m(P) = \frac{1}{4\pi}\int_v \frac{-\operatorname{div}\vec{M}}{r}\,dv + \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{\vec{n}\cdot\vec{M}}{r}\,dv$$

em que $\underline{S}$ é a superfície limítrofe do volume $\underline{v}$ do corpo magnetizado; k_0' foi já substituído por $1/4\pi$.

Esta expressão (IV-67) evidencia que, em ordem ao cálculo do potencial $V_m(P)$, a distribuição de magnetização, $\vec{M}(Q)\,dv$, i.e., a distribuição contínua de dipolos magnéticos que caracteriza o corpo magnetizado, é <u>equivalente</u> à justaposição de duas distribuições contínuas de "cargas magnéticas" <u>fictícias</u>, uma em volume outra em superfície, com densidades dadas respectivamente por:

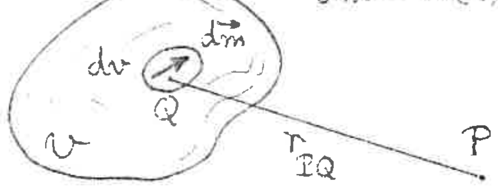
$$(\text{IV-68}) \qquad \begin{cases} \rho_m' = -\operatorname{div}_Q \vec{M} & Q\text{, ponto corrente do volume } \underline{v} \text{ do corpo magnetizado} \\ \sigma_m' = (\vec{n}\cdot\vec{M})_R & R\text{, ponto corrente da superfície } \underline{S} \text{ limítrofe de } \underline{v}. \end{cases}$$

Estas cargas magnéticas fictícias recebem também o nome de <u>cargas de magnetização</u>. (Trata-se de mais um aspecto da analogia com a Electrostática dos dieléctricos polarizados). A distribuição das cargas de magnetização, caracterizada por (IV-68) e actuante em (IV-67), é a distribuição equivalente de Poisson, adiante utilizada.

IV.7.2 — Recurso à concepção de Ampère (via II)

Parte-se da expressão do potencial-vector (IV-60), obtida para uma corrente molecular de Ampère. As correntes moleculares que se contêm no elemento de volume dv circunvizinho do ponto potenciante genérico Q vão contribuir para o potencial-vector $\vec{A}(P)$ num ponto P, mediante os respectivos dipolos magnéticos equivalentes; e todas elas o fazem segundo a mesma expressão (IV-60), com o mesmo valor para $r \equiv |\vec{PQ}|$.

$d\vec{m} = \vec{M}(Q)\,dv$



Assim, sendo $d\vec{m} = \vec{M}\,dv$ o momento dipolar magnético resultante das correntes moleculares contidas em dv, a contribuição global do elemento de volume dv para $\vec{A}(P)$ escreve-se $\mu_0/4\pi \; d\vec{m} \wedge \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}$. Então para todo o volume v do corpo magnetizado vem

$$\text{(IV-69)} \qquad \vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \left(\vec{M} \wedge \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r} \right) dv \qquad (r \equiv |\vec{QP}|)$$

O campo vem dado pela operação (habitual no campo magnético das correntes):

$$\text{(IV-70)} \qquad \vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A} \,.$$

Pode mostrar-se que o cálculo (IV-69) e a operação (IV-70) são ambos extensíveis ao caso de ser P interior ao domínio da magnetização. Fica portanto sempre assegurado o carácter solenoidal de $\vec{B}$:

(IV-71) $\qquad \operatorname{div} \vec{B} = 0$.

IV.7.2.A — Distribuição equivalente de Ampère

Por conveniente transformação de (IV-69) pode obter-se uma outra expressão para $\vec{A}(P)$, susceptível de interessante interpretação física: (*)

(IV-72) $$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\int_v \frac{c\,\mathrm{rot}_Q \vec{M}}{r}\,dv + \frac{\mu_0}{4\pi c}\int_S \frac{-c\,\vec{n}\wedge\vec{M}}{r}\,dS$$

Não preferência

Recordando as expressões do potencial-vector do campo magnético produzido por distribuições contínuas de corrente (V. nota (*) na página seguinte), reconhece-se em face de (IV-72) que, em ordem ao cálculo do potencial-vector $\vec{A}(P)$, a distribuição de magnetização $\vec{M}(Q)\,dv$, i.e., a distribuição contínua de dipolos magnéticos que caracteriza o corpo magnetizado, é <u>equivalente</u> à justaposição de duas distribuições contínuas de correntes (macroscópicas) <u>fictícias</u>, uma em volume, outra em superfície, com densidades dadas respectivamente por:

(*) A demonstração faz-se pelos seguintes passos:

(1) Lançamos mão da conhecida identidade diferencial
$$\mathrm{rot}_Q\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) = \frac{1}{r}\,\mathrm{rot}_Q \vec{M} - \vec{M}\wedge \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}$$
que, introduzida em (IV-69) conduz a
$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi c}\int_v \frac{c\,\mathrm{rot}_Q \vec{M}}{r}\,dv - \frac{\mu_0}{4\pi c}\int_v c\,\mathrm{rot}_Q\left(\frac{\vec{M}}{r}\right) dv$$

(2) Utilizamos em seguida o seguinte teorema, relativo ao operador rotacional: $\int_v \mathrm{rot}\,\vec{X}\,dv = \int_S \vec{n}\wedge\vec{X}\,dS$ sendo S a superfície limítrofe de v. Isto permite modificar o 2º integral dando origem a (IV-72).

$$(\text{IV}-73)\quad \begin{cases} \vec{J}'(Q) = c\, \mathrm{rot}_Q \vec{M} \\ \vec{j}'(R) = -c(\vec{n} \wedge \vec{M})_R \end{cases}$$

Q, ponto corrente do volume $\underline{v}$ do corpo magnetizado
R, ponto corrente da superfície $\underline{S}$ limítrofe de $\underline{v}$.

Estas correntes fictícias recebem também o nome de <u>correntes de magnetização</u>. A distribuição das correntes de magnetização, caracterizada por (IV-73) e actuante em (IV-72), é a chamada <u>distribuição equivalente de Ampère</u>, adiante utilizada.

IV.7.3 — Relação entre os campos $\vec{B}$ e $\vec{H}$

IV.7.3.A — Campo nos pontos exteriores ao domínio da magnetização

Da própria equivalência entre as acções magnéticas produzidas, individualmente, por uma corrente molecular de Ampère e por um dipolo magnético (Cf. § IV.6.3.B) decorre a identidade, <u>para os pontos exteriores</u>, dos campos $\vec{H}$ e $\vec{B}$ calculados mediante as expressões dos §§ IV.7.1 e IV.7.2, respectivamente.

Com efeito, semelhantemente ao que sucede com a expressão (IV-69) de $\vec{A}(P)$, também a expressão (IV-64) de $V_m(P)$ — conquanto tenha surgido de modo mais directo — pode ser olhada como resultante de se realizar, relativamente a cada elemento de volume,

---

Nota da página anterior

(*) Fàcilmente se concebe que, à semelhança da distribuição contínua de corrente em volume, com densidade $\vec{J}$ e elemento de corrente $\vec{J}\,dv \diamond \delta e \vec{v}$ (Cf. (IV-12), pag 166), se possa também pensar numa distribuição contínua de corrente em superfície com uma densidade $\vec{j}$ e elemento de corrente $\vec{j}\,dS \diamond \delta e \vec{v}$ (movimento de cargas numa folha condutora). O potencial-vector do campo magnético produzido por esta distribuição teria a expressão evidente $\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_S \frac{\vec{j}}{r}\,dS$, conforme a (IV-19).

uma soma das acções devidas a todos os dipolos magnéticos equivalentes às correntes moleculares de Ampère contidas em dv.

Teremos assim entendida a relação de identidade (IV-63), válida para pontos exteriores ao domínio de magnetização.

IV.7.3.B — Campos $\vec{H}$ e $\vec{B}$ nos pontos interiores ao domínio de magnetização

Como já foi referido, mostra-se que ambos os formalismos de cálculo dos campos $\vec{H}$ e $\vec{B}$ (§§ IV.7.1 e IV.7.2) são extensíveis aos pontos interiores ao domínio de magnetização. Essa extensão permite definir o campo no interior de um corpo magnetizado de uma maneira convencional, devendo a sua significação física ser discutida e esclarecida por um método semelhante ao adoptado na Electrostática dos dieléctricos polarizados (Cf. § 9.5, pag 120'' a 120^{VI}).

Pode ver-se desde logo que as expressões dos campos, que assim resultam generalizadas a todo o espaço, não podem conduzir a um campo idêntico em todo o espaço pela simples razão de que os dois campos $\vec{H}$ e $\vec{B}$ são estruturalmente distintos nas suas propriedades: um, solenoidal em toda a parte ($\vec{B}$); outro, irrotacional em toda a parte ($\vec{H}$). Com efeito, sabe-se da teoria geral dos campos de vectores que não pode existir um campo simultâneamente solenoidal e irrotacional por toda a parte (reduzir-se-ia a um campo nulo).

Assim, sendo $\vec{H}$ e $\vec{B}$ idênticos entre si na região do espaço exterior ao corpo magnetizado, eles devem essencialmente diferir um do outro no domínio da magnetização (não podem aí identificar-se entre si para todos os pontos). Esta essencial diferença entre $\vec{H}$ e $\vec{B}$ vai ser esclarecida nos §§ seguintes.

IV. 7.3. C — Introdução do "vector magnético de Hertz"

Com o objectivo de encontrar a relação geral entre $\vec{H}$ e $\vec{B}$, revela-se cómodo introduzir um novo potencial-vector $\vec{\Pi}_m$ dito "vector magnético de Hertz" e definido por

$$\vec{\Pi}_m(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_v \frac{\vec{M}(Q)}{r_{PQ}}\, dv \qquad \text{(IV-74)}$$

como uma função da distribuição da magnetização $\vec{M}(Q)$.

Olhando ao tipo de potenciação que caracteriza (IV-74), bem conhecida dos estudos anteriores, vê-se que se pode logo assegurar uma importante propriedade para $\vec{\Pi}_m$: satisfaz à seguinte equação de Poisson:

$$\operatorname{lap}_P \vec{\Pi}_m = -\mu_0 \vec{M}(P) \qquad \text{(IV-75)}$$

Podem por outro lado estabelecer-se, sem grande dificuldade, as relações que devem existir entre $\vec{\Pi}_m$ e V_m e entre $\vec{\Pi}_m$ e $\vec{A}$, dada a comum dependência de $\vec{M}(Q)$. Encontram-se os seguintes resultados:

$$\operatorname{div}_P \vec{\Pi}_m = -\mu_0 V_m(P) \qquad \text{(IV-76)}$$

$$\operatorname{rot}_P \vec{\Pi}_m = \vec{A}(P) \qquad \text{(IV-77)}$$

(As demonstrações são dadas na página seguinte.)

Mas isto significa que se podem derivar os dois campos $\vec{H}$ e $\vec{B}$ a partir do mesmo potencial-vector $\vec{\Pi}_m$. Com efeito, combinando (IV-65) com (IV-76), vem

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{\Pi}_m \; ; \qquad \text{(IV-78)}$$

e, combinando (IV-70) com (IV-77), vem

$$\vec{B} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{\Pi}_m \, . \qquad \text{(IV-79)}$$

Para a demonstração de (IV-76):

(1) Tome-se div_P de ambos os membros de (IV-74):

$$\mathrm{div}_P \vec{\Pi}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_v \frac{\mathrm{div}_P \vec{M}}{r}\, dv + \int_v \left(\vec{M}\cdot \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right) dv\right]$$

(os operadores div_P e $\int_v \dots dv$ comutam, admitindo que $\vec{M}$ é finita e contínua; e aplicou-se já o desenvolvimento de $\mathrm{div}_P(\vec{M}/r)$).

(2) Notando que $\mathrm{div}_P \vec{M}$ só não é nula (mas finita) para o elemento de volume de integração que fique eventualmente circunvizinho de P, sendo todavia desprezável a contribuição correspondente, resulta:

$$\mathrm{div}_P \vec{\Pi}_m = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \left(\vec{M}\cdot \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}\right) dv$$

que, confrontando com (IV-64), dá (IV-76).

Para a demonstração de (IV-77):

(1) Opere-se rot_P em ambos os membros de (IV-74):

$$\mathrm{rot}_P \vec{\Pi}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\int_v \frac{\mathrm{rot}_P \vec{M}}{r}\, dv - \int_v \left(\vec{M}\wedge \mathrm{grad}_P \frac{1}{r}\right) dv\right]$$

(os operadores rot_P e $\int_v \dots dv$ comutam; e operou-se $\mathrm{rot}_P(\vec{M}/r)$).

(2) Considerações análogas às anteriormente feitas levam a anular o 1º integral, vindo

$$\mathrm{rot}_P \vec{\Pi}_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \left(\vec{M}\wedge \mathrm{grad}_Q \frac{1}{r}\right) dv$$

que, confrontando com (IV-69), dá (IV-77).

IV. 7.3.D — Relação geral entre $\vec{B}$ e $\vec{H}$

Torna-se agora muito simples estabelecer a relação geral entre $\vec{B}$ e $\vec{H}$. Introduzindo as expressões (IV-78) e (IV-79), de $\vec{H}$ e $\vec{B}$, e a propriedade (IV-75), de $\vec{\Pi}_m$, na conhecida identidade diferencial

$$\text{rot rot } \vec{\Pi}_m = \text{grad div } \vec{\Pi}_m - \text{lap } \vec{\Pi}_m$$

vem imediatamente:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \qquad \text{(IV-80)}$$

Esta relação confirma a identidade dos campos $\vec{B}$ e $\vec{H}$ nos pontos exteriores ao corpo magnetizado, em que $\vec{M} = 0$; e exprime que, em todo o domínio da magnetização, a diferença entre $\vec{B}/\mu_0$ e $\vec{H}$ num ponto genérico Q iguala simplesmente o valor local da magnetização $\vec{M}(Q)$.

A partir desta relação se pode em seguida completar o conhecimento das propriedades do campo.

17/I/65

IV. 7.4 — Propriedades do campo

(A) Recorrendo a $\text{div}\,\vec{B} = 0$ (eq. (IV-71)) e utilizando (IV-80), obtem-se

$$\text{div}\,\vec{H} = -\,\text{div}\,\vec{M} \qquad \text{(IV-81)}$$

e recordando (IV-68), vem:

$$\text{div}\,\vec{H} = \rho'_m \qquad \text{(IV-82)}$$

Vê-se assim que o campo irrotacional $\vec{H}$ ($\text{rot}\,\vec{H} = 0$) tem como "fonte de divergência" precisamente $-\text{div}\,\vec{M}$; e satisfaz a uma equação análoga à equação de Poisson do campo eléctrico nos dieléctricos polarizados, em harmonia com as considerações anteriores referentes ao recurso à analogia com a Electrostática (via I).

(B) Recorrendo agora a $\mathrm{rot}\,\vec{H} = 0$ (eq. (IV-66)) e utilizando (IV-80), obtém-se

$$\text{(IV-83)} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\mathrm{rot}\,\vec{M} \quad ;$$

e recordando (IV-73), vem:

$$\text{(IV-84)} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{\mu_0}{c}\vec{J}'$$

Vê-se assim que o campo solenoidal $\vec{B}$ ($\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$) tem como "fonte de vórtice" precisamente $\mu_0\,\mathrm{rot}\,\vec{M}$; e, se se utiliza a corrente fictícia de magnetização, $\vec{J}' = c\,\mathrm{rot}\,\vec{M}$, $\vec{B}$ satisfaz a uma equação formalmente idêntica à equação de Ampère para o campo produzido por uma corrente estacionária verdadeira, de densidade $\vec{J}$, em harmonia com as considerações anteriores referentes ao recurso à concepção de Ampère (via II).

Temos, em resumo, <u>para o campo magnético produzido por um corpo magnetizado</u>, descrito com a ajuda do par de vectores $(\vec{H} ; \vec{B})$, as seguintes propriedades:

$$\vec{H} : \begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{H} = 0 \\ \mathrm{div}\,\vec{H} = \rho'_m \end{cases} \qquad \vec{B} : \begin{cases} \mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{\mu_0}{c} J' \\ \mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \end{cases}$$

em que $\rho'_m = -\mathrm{div}\,\vec{M}$ e $\vec{J}' = c\,\mathrm{rot}\,\vec{M}$ representam as "fontes" da distribuição de magnetização $\vec{M}(Q)$ que produz o campo magnético assim descrito.

[A estas propriedades, válidas em pontos interiores a regiões de continuidade, devem juntar-se as degenerescências das mesmas sobre superfícies de descontinuidade, como é habitual fazer-se.]

30/1/90

IV . 7.5 — Sobre o significado físico de $\operatorname{div} \vec{B} = 0$

O carácter solenoidal do campo da indução, $\vec{B}$, é uma propriedade fundamental que subsiste em todo o campo electromagnético — sendo por isso a equação $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ incorporada no sistema das equações de Maxwell, o qual, como já temos adiantado, consubstancia os princípios fundamentais do Electromagnetismo.

É por consequência de todo o interesse discutir a interpretação que se pode dar desta equação neste domínio do campo magnético dos ímans — e isso pode fazer-se fàcilmente com base nas propriedades estabelecidas nos §§ precedentes.

Sendo o campo $\vec{H}$, definido em IV. 7.1, o análogo do campo $\vec{E}$ da Electrostática, segue-se que à equação de Poisson da Electrostática escrita na sua forma geral como

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho + \rho')$$

deveria corresponder uma equação de Poisson na Magnetostática, estritamente análoga (à parte a diferença irrelevante entre os coeficientes de proporcionalidade)

$$\operatorname{div} \vec{H} = \rho_m + \rho'_m \qquad \text{(IV-85)}$$

em que figuraria, além da densidade de carga, fictícia, de magnetização ρ'_m, também a densidade de carga magnética verdadeira hipotèticamente considerada, numa analogia completa. Então, se tivéssemos em conta a eq. (IV-68) e a eq. (IV-80), a eq. (IV-85) re-escrever-se-ia sob a forma

$$(\text{IV}-85)' \qquad \text{div}\,\vec{B} = \mu_0 \rho_m \,.$$

Diríamos, em consequência, que, nesta equação, o vector $\vec{B}$ escamoteia as cargas de magnetização (fictícias) e fica directamente relacionado com a <u>densidade de carga magnética verdadeira</u>, <u>hipotèticamente considerada</u>. A eq. (IV-85)' seria assim a análoga directa da eq. $\text{div}\,\vec{D} = \rho$ na Electrostática, e, deste ponto de vista, a indução $\vec{B}$ seria o análogo ao deslocamento $\vec{D}$.

É a <u>não-existência de cargas magnéticas verdadeiras</u>(*), tomada como um dos princípios de interpretação de todos os fenómenos no campo dos ímans, e depois a todos os fenómenos electromagnéticos, que vem modificar o aspecto formal das eq. (IV-85) e (IV-85)' para re-encontrarmos as propriedades já estabelecidas. Com efeito, se tomarmos

$$(\text{IV}-86) \qquad \rho_m = 0$$

<u>como afirmação de um princípio universal</u>, vem imediatamente (IV-85) com o seu verdadeiro aspecto (IV-82) e (IV-85)' com o seu verdadeiro aspecto (IV-71). Pode dizer-se portanto que escrever $\rho_m = 0$ é equivalente a escrever $\text{div}\,\vec{B} = 0$.

Assim, fica bem patente que a eq. $\text{div}\,\vec{B} = 0$ traduz a não existência de cargas magnéticas verdadeiras — esse é o seu significado físico, primeiro no domínio restrito do campo dos ímans, depois em todo o Electromagnetismo.

(*) Cf. IV.5, pag 189

IV. 8 — Campo magnético de correntes e de ímans

A sobreposição das acções produzidas por uma corrente estacionária e por um íman, no espaço que os cerca, é regida pela aditividade vectorial dos campos de indução $\vec{B}$, justificada com base na aditividade das forças de Laplace (Cf. IV.1.4). As propriedades do campo magnético da corrente estacionária com substâncias magnéticas presentes decorrem por consequência deste princípio de aditividade.

Em primeiro lugar, sendo a equação $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ propriedade comum aos dois tipos de campo, é evidente que ela se mantém na sobreposição.

Em segundo lugar, sabemos que, para o campo magnético da corrente estacionária com densidade $\vec{J}$, se verifica a eq. de Ampère (IV-25):

$$\text{(IV-25)}' \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \vec{J} \quad ;$$

e também sabemos que, para o campo de um íman, se verifica uma equação formalmente idêntica à eq. de Ampère, a saber, (IV-84):

$$\text{(IV-84)}' \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \vec{J}' \quad ,$$

se se utiliza a corrente fictícia de magnetização, de densidade $\vec{J}' = c \operatorname{rot} \vec{M}$.

Fazendo então jogar o princípio de aditividade, teremos, para o campo de sobreposição:

$$\text{(IV-87)} \qquad \operatorname{rot} \vec{B} = \frac{\mu_0}{c} (\vec{J} + \vec{J}')$$

em que $\vec{B}$ representa já a indução magnética total. A eq. (IV-87) representa uma extensão, modificada, da eq. de Ampère — feita para abarcar os dois tipos de campos, das correntes e dos ímanes.

Mas pode dar-se a (IV-87) uma transformação interessante. Introduzindo a expressão de $\vec{J}'$ ($\vec{J}' = c\,\mathrm{rot}\,\vec{M}$) vem sucessivamente

$$\mathrm{rot}\,\vec{B} = \frac{\mu_0}{c}\vec{J} + \mu_0\,\mathrm{rot}\,\vec{M}$$

e

$$\text{(IV-88)} \qquad \mathrm{rot}\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}\right) = \frac{1}{c}\vec{J} .$$

Então, enquanto a eq. (IV-87) significa que $\mathrm{rot}\,\vec{B}$ deixa de ser, no domínio de sobreposição dos campos, proporcional a $\vec{J}$ — a eq. (IV-88) significa que há no entanto um vector, $\vec{B}/\mu_0 - \vec{M}$, cujo rotacional é ainda proporcional a $\vec{J}$.

Se, para a sobreposição dos dois tipos de campos, continuarmos a definir o vector $\vec{H}$, campo magnético por uma relação formalmente idêntica a (IV-80), a saber, mediante

$$\text{(IV-89)} \qquad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$$

(mais geral que (IV-80) porque envolve os dois tipos de campos), então a eq. (IV-88) reescreve-se simplesmente:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{1}{c}\vec{J} .$$

É a equação de Ampère, generalizada, no campo estacionário.