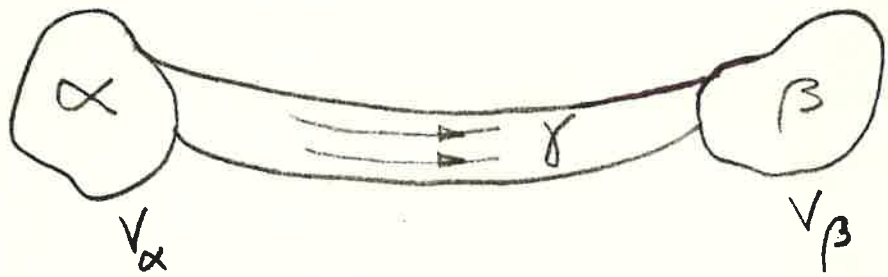
III — CORRENTE ELECTRICA

III. 1 — Introdução

Tratámos até aqui das interacções entre cargas em repouso. Vamos agora ocupar-nos dos efeitos produzidos pelas cargas eléctricas em movimento. Ao passar assim da Electrostática para um domínio mais geral do Electromagnetismo, o primeiro novo conceito que se nos impõe abordar é o de corrente eléctrica.

Suponhamos que dois condutores α e β, a potenciais diferentes V_α e V_β, em equilíbrio electrostático, são postos em contacto por intermédio de um terceiro condutor γ. No momento em que se estabelece uma tal ligação, o potencial não é, de certeza, constante, nos diferentes pontos deste último condutor, γ, visto que temos



os valores V_α e V_β nos seus extremos ($V_\alpha \neq V_\beta$). Surge, portanto um campo eléctrico dentro do condutor γ; isso significa que deixam de ser satisfeitas as condições de equilíbrio electrostático, o qual se rompe. A experiência mostra que estes condutores são então atravessados por fluxos de cargas eléctricas (fluxos organizados, à escala macroscópica). Descrevemos este fenómeno dizendo que os condutores, especialmente o condutor γ, são percorridos por corrente eléctrica. A tendência que se verifica é o estabelecimento de novo equilíbrio electrostático, atingido o qual a corrente eléctrica cessa. Por meios puramente electrostáticos dificilmente se consegue obter uma corrente longamente perdurável e não pode realizar-se um regime permanente; outros dispositivos experimentais o permitem porém: pilhas voltaicas, acumuladores, pares termo-eléctricos, por exemplo. Em todos os casos a corrente surge num condutor sempre que entre dois dos seus pontos se estabelece uma diferença de potencial do tipo figurado.

A corrente eléctrica está assim associada ao aparecimento de um campo eléctrico no seio dos condutores — campo electromotor — e produz dois efeitos observáveis experimentalmente:

1º) gera, à sua volta, um campo de acções magnéticas (detectáveis sobre pequenos ímans);

2º) acompanha-se de uma libertação de calor em cada elemento de volume do condutor.

Ao campo eléctrico, em geral variável, que origina a corrente sobrepõe-se, assim, um campo magnético, também em geral variável, e estes dois campos são profundamente indissociáveis: estamos em presença de um campo electromagnético. É, somente, no caso em que estes dois campos não variam com o tempo, que eles podem ser tratados independentemente porque, nesse caso, de facto, coexistem sem se interferir mutuamente. O campo electromagnético diz-se então estacionário, e a corrente eléctrica a que está associado diz-se corrente estacionária. Dada a independência de tratamento então realizável, pode falar-se de um campo eléctrico da corrente estacionária e de um campo magnético da corrente estacionária.

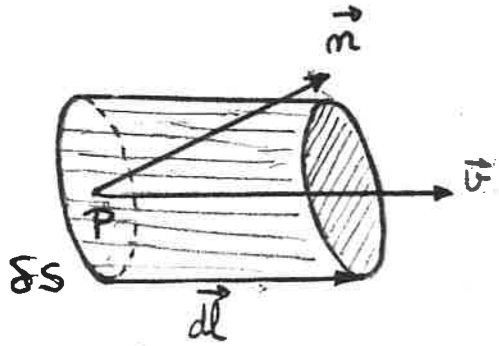
A libertação de calor, que acompanha a passagem da corrente num condutor, revela a existência de trocas dissipativos de energia entre os diferentes elementos constituintes do sistema, que engloba, além do dito condutor, as fontes do campo electromotor da corrente. Contràriamente ao que se passa no domínio da Electrostática, aqui, o campo não é conservativo, o que permite, desde já, avançar que a equação rot $\vec{E}=0$, propriedade fundamental do campo electrostático, não subsiste, de um modo geral, no campo electromagnético.

III.2 Densidade de corrente

Consideremos um condutor no qual se acha estabelecida uma corrente eléctrica variável.

Para descrever, de um ponto macroscópico, esta corrente num ponto $P(x,y,z)$ do interior do condutor e num instante $\underline{t}$, fazemos apelo à densidade volúmica da carga eléctrica que se move, $\rho_m(x,y,z,t)$ e à velocidade $\vec{v}(x,y,z,t)$ de que se acha animada a carga elementar $\rho_m\,dv$, que, nesse instante, passa no elemento de volume dv circunvizinho ao ponto P.

Seja δS um elemento de área em torno do ponto P e seja $\vec{n}$ a semi-normal a δS com um dado sentido. Calculemos a quantidade de electricidade, δe, que passa, no tempo $\underline{dt}$, através de δS, no sentido de $\vec{n}$: esta carga distribue-se pelo elemento de volume, representado na figura,



$$\delta\Omega=\delta S\,(\vec{dl}\cdot\vec{n})=\delta S\,(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dt$$

$$\vec{dl}=\vec{v}\,dt$$

do cilindro elementar de base δS e geratriz $\vec{dl}$ (portanto de altura $\vec{dl}\cdot\vec{n}=(\vec{v}\cdot\vec{n})\,dt$).

Então temos: $\delta e=\rho_m\,\delta\Omega=\rho_m\,\delta S\;\vec{v}\cdot\vec{n}\;dt.$

Chamamos intensidade elementar da corrente (através do elemento de área δS, com a orientação $\vec{n}$) a quantidade δi dada por:

$$\delta i = \frac{\delta e}{dt} = \rho_m \, \vec{v} \cdot \vec{n} \, \delta S$$

Isto significa que o fluxo elementar do vector $\vec{J}$ definido por:

$$(\text{III-1}) \qquad \vec{J} = \rho_m \vec{v}$$

dá a intensidade elementar da corrente através de um qualquer elemento de área δS, em torno do ponto P e no instante t, com uma qualquer orientação $\vec{n}$:

$$(\text{III-2}) \qquad \delta i = \vec{J} \cdot \vec{n} \, \delta S$$

$\vec{J}$ chama-se <u>densidade de corrente</u>; trata-se de um vector definido em cada ponto e a cada instante, $\vec{J}(x,y,z,t)$. Caracteriza, de modo assaz completo, a corrente eléctrica no condutor. As linhas de força do campo vectorial $\vec{J}(x,y,z,t)$ num dado instante $\underline{t}$ chamam-se <u>linhas de corrente</u>.

Por integração da relação (III-2) obtemos a <u>intensidade da corrente</u> que passa num dado sentido através de uma área finita S:

$$(\text{III-3}) \qquad i = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, \delta S$$

Se, em particular, S é uma superfície fechada e $\vec{n}$ a semi-normal exterior, i será a quantidade de electricidade que <u>sai</u>, globalmente, por unidade de tempo, através de S (ou seja que sai do volume contido em S).

III - 3 Equação de conservação da carga eléctrica

Se admitirmos, como princípio, a conservação da carga eléctrica, deve existir uma relação bem precisa entre a corrente e a forma como varia, com o tempo, a distribuição das cargas eléctricas, de densidade volúmica total $\rho(x,y,z,t)$, no condutor.

Com efeito, um tal princípio exige que a quantidade de electricidade que sai de (ou que entra para) um dado volume fixo no condutor, no intervalo de tempo dt, seja exactamente igual à diminuição (ou ao aumento) que, nesse intervalo de tempo, se observa para a carga eléctrica contida no mesmo dado volume. Então, se for S uma superfície fechada em torno de um ponto P no interior do condutor, vem por (III-3) e pelas considerações que acabamos de fazer

$$\int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\,\delta S = -\frac{d}{dt}\int_v \rho\,\delta v$$

em que v é o volume limitado pela superfície S. O integral do 1.º membro transforma-se pelo teorema do fluxo-divergência; no 2.º membro são permutáveis os símbolos de cálculo $\frac{d}{dt}$ e $\int_v$ que dizem respeito a variáveis independentes entre si. Resulta assim:

$$\int_v \operatorname{div}\vec{J}\,\delta v = -\int_v \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\delta v$$

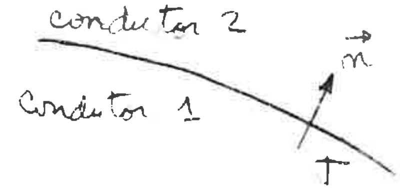
e como esta relação deve verificar-se para todo o volume V por menor que seja, temos:

$$(\text{III-4})\qquad \operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$$

equação, de carácter local, que traduz a <u>conservação da carga eléctrica</u>. Trata-se de uma equação fundamental em toda a teoria do Electromagnetismo.

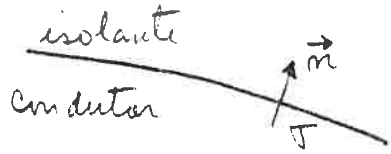
Prova-se que a equação (III-4) degenera, para uma superfície de separação de dois meios condutores (1) e (2) — em que ρ e $\vec{J}$ são descontínuas —, na seguinte equação

$$(\text{III-5}) \qquad \vec{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$$



em que $\vec{n}$ é a semi-normal à superfície de descontinuidade (dirigida de (1) para (2)), se admitirmos que sobre a superfície de separação existe uma densidade superficial $\sigma(x, y, z, t)$. Para um ponto da superfície limítrofe do condutor (separação condutor-isolante) tem-se em particular

$$(\text{III-6}) \qquad \vec{n} \cdot \vec{J} = \frac{\partial \sigma}{\partial t}$$



sendo $\vec{J}$ a densidade de corrente à superfície do condutor ($\vec{J} = 0$ para o isolante).

13/12/88

11/1/90

III.4 — <u>Lei de Ohm</u>

Existe, forçosamente, uma relação bem definida entre o vector $\vec{J}$, caracterizando a corrente eléctrica, e o campo electromotor $\vec{E}$ que lhe está associado. A experiência mostra que, em primeira aproximação, se tem uma relação de proporcionalidade directa

$$(\text{III-7}) \qquad \vec{J} = \sigma^* \vec{E} \qquad \sigma^* \text{ escalar } (>0)$$

em que σ^*, independente de $\vec{E}$, é a <u>condutividade eléctrica</u> do condutor (depende das condições físicas do condutor).

A relação (III-7) traduz a lei de Ohm tal como é válida para os condutores isótropos. No caso dos condutores anisótropos $\vec{J}$ não é proporcional a $\vec{E}$, mas existem relações lineares e homogéneas entre os componentes dos dois vectores; σ^* deve em consequência substituir-se por um tensor cujos componentes são ainda independentes de $\vec{E}$.

A lei de Ohm foi estabelecida experimentalmente quer para correntes estacionárias, quer para correntes variável. A comparação das fórmulas (III-1) e (III-7) diz-nos que o campo electromotor $\vec{E}$ é proporcional à velocidade $\vec{v}$ das cargas eléctricas, e não à sua aceleração. Para explicar este facto, só aparentemente paradoxal, devemos admitir que as cargas sob a acção dum campo electromotor $\vec{E}$ adquirem, quase instantâneamente, em cada ponto, uma velocidade $\vec{v}$ tal que o campo das forças resistentes, devidas ao meio, contrabalança exactamente $\vec{E}$, pelo que cessa a aceleração.

Vejamos como se pode descrever este processo de estabelecimento da corrente, com base num modelo muito simples para a estrutura microfísica dos condutores metálicos. Um condutor pode considerar-se como constituído por uma rede cristalina de iões positivos fixos, dentro da qual circulam os electrões livres (Cf. §8.1, pag. 75) num incessante movimento desordenado (caótico) de agitação térmica, essencialmente condicionado pelas colisões com os iões fixos. Na ausência de campo eléctrico exterior, em cada elemento de volume macroscópico $d\Omega$, é nula a média (espacial) das velocidades dos electrões livres, e não se processa nenhum transporte efectivo de carga no condutor.

Aula prática 85/86

Sob a acção de um campo eléctrico exterior $\vec{E}$, a força eléctrica que se exerce sobre cada um dos electrões livres, a mesma para todos, provoca-lhes um movimento de arrastamento, a que corresponde uma velocidade média, diferente de zero, na direcção do campo; mas este arrastamento dos electrões livres é contrariado por uma resistência (do tipo "força de atrito") que tem a sua origem nas colisões que sofrem com os iões positivos da rede cristalina. Gera-se, assim, um transporte efectivo de carga (negativa) no condutor, que é regido pelo balanço entre essas duas forças, força eléctrica devida ao campo e força de resistência. (*)

Escrevamos, então, a equação do movimento para este transporte de carga, referido ao elemento de volume macroscópico $d\Omega$ do condutor. O campo eléctrico actuará sobre a carga eléctrica móvel deste elemento de volume, $\rho_m\, d\Omega$, com uma força

$$d\vec{f}_{elect.} = \rho_m \, d\Omega \, \vec{E} \, .$$

Admitindo que a força de atrito, $d\vec{f}_{resist.}$, actuará na direcção da velocidade $\vec{v}$ de transporte dessa carga móvel, mas em sentido contrário, com um valor proporcional a $|\vec{v}|$ e ao número de electrões livres presentes em $d\Omega$ (por sua vez proporcional a $d\Omega$), teremos:

(*)

Para uma interpretação da condução eléctrica nos metais do ponto de vista da teoria atómica da constituição da matéria, ver, por exemplo:

— R. PLONSEY & R. COLLIN
Principles of Electromagnetic Fields (1961)
Mc. Graw Hill, New York, pag. 165

— G. JOOS, Theoretical Physics, 2ª edition (1951) pag. 444-5

$$d\vec{f}_{resist.} = -a\,d\Omega\,\vec{v} \quad ;$$

portanto, se fôr μ a massa específica das cargas móveis, a equação do movimento será:

$$\mu\,d\Omega\,\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho_m\,d\Omega\,\vec{E} - a\,d\Omega\,\vec{v}$$

ou

$$\mu\,\frac{d\vec{v}}{dt} + a\vec{v} = \rho_m\vec{E} \,,$$

donde, por integração:

$$\vec{v} = \frac{\rho_m}{a}\vec{E} + \vec{C}\,e^{-\frac{a}{\mu}t}$$

e como para $t=0$, $\vec{v}=0$

$$\vec{v} = \frac{\rho_m}{a}\left(1 - e^{-\frac{a}{\mu}t}\right)\vec{E}$$

Esta expressão mostra-nos que a velocidade $\vec{v}$ tende para um valor limite:

$$(\text{III-8}) \qquad \vec{v} = \frac{\rho_m}{a}\vec{E}$$

que corresponde ao estabelecimento do equilíbrio entre a força eléctrica $d\vec{f}_{elect.}$ e a força de resistência $d\vec{f}_{resist}$:

$$d\vec{f}_{elect} + d\vec{f}_{resist} = 0 \qquad ;$$

$\vec{v}$ tende tanto mais ràpidamente para esse valor limite, em que fica proporcional a $\vec{E}$, quanto maior fôr o coeficiente a/μ que figura na exponencial. O decréscimo da exponencial é, na realidade, muito rápido, muito inferior ao tempo de qualquer medida, pelo que o valor

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{a}{\mu}\vec{v} = \frac{\rho_m}{\mu}\vec{E}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{\rho_m}{\mu}\vec{E} - \frac{a}{\mu}\vec{v}\right)$$

$$\frac{dv_x\left(-\frac{a}{\mu}\right)}{\frac{\rho_m}{\mu}E_x - \frac{a}{\mu}v_x} = dt\left(-\frac{a}{\mu}\right)$$

$$\ln\left(\frac{\rho_m}{\mu}E_x - \frac{a}{\mu}v_x\right) = -\frac{a}{\mu}t + \ln C$$

$$\ln\frac{\frac{\rho_m}{\mu}E_x - \frac{a}{\mu}v_x}{C_x} = -\frac{a}{\mu}t$$

$$\frac{\rho_m}{\mu}E_x - \frac{a}{\mu}v_x = C_x e^{-\frac{a}{\mu}t}$$

$$\times\frac{\mu}{a} \Rightarrow \frac{\rho_m}{a}E_x - v_x = C'_x e^{-\frac{a}{\mu}t}$$

de $\vec{v}$, dado pela fórmula (III-8) pode considerar-se como atingido quase instantâneamente. Cite-se, como exemplo, que, no caso do cobre, μ/a vale 2×10^{-14} s.

III.5 - Lei de Joule

A lei de Joule rege a libertação de calor que é produzida pela passagem de corrente eléctrica. É uma lei experimental estabelecida, quer com corrente estacionária, quer com corrente variável. Pode enunciar-se assim:

A quantidade de calor δQ libertada no elemento de volume δv, circunvizinho de um ponto P de um condutor homogéneo, a temperatura uniforme, durante o tempo dt é dada por

$$(\text{III-9}) \qquad \delta Q = \frac{1}{\sigma^*} \vec{J}^2 \, \delta v \, dt$$

sendo $\vec{J}$ a densidade de corrente e σ^* a condutividade no ponto P.

Pode também escrever-se quando se atende à lei de Ohm

$$(\text{III-9}') \qquad \delta Q = (\vec{J}.\vec{E}) \, \delta v \, dt = \sigma^* \vec{E}^2 \, \delta v \, dt$$

Deve notar-se que a hipótese atrás admitida para interpretar a lei de Ohm, de que existe um campo de forças resistentes, no meio, equilibrando o campo electromotor, pode estender-se agora a uma interpretação consequente da lei de Joule. O calor libertado deve, nessa hipótese, resultar do trabalho (negativo) das forças resistentes, para o qual se terá:

$$\delta W = \vec{f}_{resist.} \cdot \vec{dl} = -\vec{f}_{elect.} \cdot \vec{v} \, dt = -\rho_m \, \delta v \, \vec{E}.\vec{v} \, dt = -(\vec{J}.\vec{E}) \, \delta v \, dt$$

num deslocamento elementar $\vec{dl}$, durante dt, com a velocidade $\vec{v}$, da carga móvel contida no elemento de volume δv. Ora, na realidade, verifica-se que $\delta W = -\delta Q$.

III.6 – Lei de dispersão das cargas num condutor homogéneo e isótropo.

mas

Um meio condutor percorrido por correntes eléctricas, pode, como todo o meio material, manifestar também propriedades dieléctricas e o estabelecimento do campo electromotor $\vec{E}$, nesse condutor, pode, em consequência, originar, em cada ponto, uma polarização $\vec{P}$. Somos assim conduzidos a definir, como na Electrostática, um vector deslocamento eléctrico $\vec{D}$ pela relação:

$$(\text{III}-10) \qquad \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

sendo ϵ a constante dieléctrica do meio material. Na Electrostática estabeleceu-se a equação fundamental

$$(\text{III}-11) \qquad \operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

relacionando o deslocamento eléctrico $\vec{D}$ com a densidade volúmica de carga ρ. Manter-se-á esta equação (III-11) no campo electromagnético variável? Vimos já que uma das equações fundamentais do campo electrostático, a saber $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, não pode manter-se no campo electromagnético, de um modo geral, por razões apontadas. Em contrapartida, admite-se que a equação (III-11) subsiste efectivamente como relação válida, a cada instante, entre as grandezas $\vec{D}(x,y,z,t)$ e $\rho(x,y,z,t)$, densidade volúmica da carga total. A equação (III-11) é, com efeito, uma das equações fundamentais da teoria de Maxwell, que constituem, no seu conjunto, os princípios do Electromagnetismo.

A equação (III-11) subsiste, portanto, como um princípio.

A lei de dispersão das cargas eléctricas num condutor homogéneo e isótropo, que vamos agora estabelecer, resulta da equação (III-11), tida em conta a definição (III-10), da equação da conservação da carga eléctrica (III-4) e da lei de Ohm (III-7). Porque o condutor é homogéneo, podemos, facilmente, eliminar entre as quatro relações:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{D} = \rho & \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \operatorname{div} \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t} & \vec{J} = \sigma^* \vec{E} \end{cases}$$

as grandezas $\vec{D}$, $\vec{J}$ e $\vec{E}$. Isto conduz-nos à seguinte equação diferencial em ρ e t:

$$\text{(III-12)} \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma^*}{\varepsilon}$$

que fornece, por integração:

$$\text{(III-13)} \qquad \rho = \rho_0 \, e^{-\frac{\sigma^*}{\varepsilon} t} = \rho_0 \, e^{-t/\theta}$$

sendo $\rho_0 = \rho_0(x,y,z)$ a distribuição inicial no meio (condutor-isolante).

A densidade ρ em cada ponto decai exponencialmente para zero, no decurso do tempo.

De um ponto de vista matemático, só para <u>$t=\infty$ é que ρ se torna nula</u>; mas, de um ponto de vista físico, dado o carácter exponencial do decrescimento, podemos dizer que ao fim de um tempo, mais ou menos curto, ρ se torna tão pequeno que pode ficar abaixo da sensibilidade dos aparelhos de medida, portanto pràticamente nulo.

A rapidez deste decrescimento para zero é medida pela grandeza

$$(\text{III}-14) \qquad \theta = \frac{\varepsilon}{\sigma^*}$$

que tem o carácter físico de um tempo — e se chama <u>tempo de relaxação</u> — representando, efectivamente, o tempo ao fim do qual ρ se reduz a $\frac{1}{e}$ ($\simeq 1/2{,}7$) do seu valor inicial. A tabela seguinte dá os tempos de relaxação para alguns materiais comuns

<u>Material</u>	<u>Tempo de relaxação θ</u>
Prata	$1{,}3 \times 10^{-19}$ s
Cobre	$1{,}5 \times 10^{-19}$ s
Água do mar	2×10^{-10} s
Água destilada	10^{-6} s
Quartzo fundido	10 dias

Podemos notar que os bons condutores têm um tempo de relaxação extremamente curto e que os isolantes têm um tempo de relaxação relativamente grande. De facto, é o tempo de relaxação que verdadeiramente permite aferir se se deve considerar um determinado meio material como <u>condutor</u> ou como <u>isolante</u>. Se θ é muito menor que a duração de uma medida, o material comporta-se como condutor; se θ é muito maior que a duração de uma medida como isolante.

Notemos, por fim, que, se num condutor homogéneo não subsiste pràticamente nenhuma quantidade de electricidade distribuída em volume (ρ tende muito ràpidamente para zero), em contrapartida, podem subsistir distribuições superficiais sobre superfícies de descontinuidade tais como a superfície limítrofe do condutor ou a superfície de separação de dois condutores homogéneos. Sobre uma tal superfície (separando os meios ① e ②) a equação (III-11) $\mathrm{div}\,\vec{D}=\rho$ degenera em:

$$(\text{III-15}) \qquad \vec{n}\cdot(\vec{D}_2-\vec{D}_1)=\sigma$$

e, por outro lado, a equação de conservação da carga eléctrica $\mathrm{div}\,\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$ (III-4) degenera em:

$$(\text{III-16}) \qquad \vec{n}\cdot(\vec{J}_2-\vec{J}_1)=-\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

sendo $\vec{n}$ a semi-normal dirigida de ① para ② e σ a densidade superficial de carga eléctrica. Estas equações (III-15) e (III-16), combinadas com a definição (III-10) $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$ e com a lei de Ohm (III-7) $\vec{J}=\sigma^*\vec{E}$, regem a distribuição σ e a sua evolução no tempo. Vê-se bem que não é agora possível extrair uma relação simples como (III-12), descrevendo a evolução no tempo de $\sigma(x,y,z,t)$. Enquanto a dispersão das cargas distribuídas em volume, $\rho(x,y,z,t)$, se processa de uma forma independente do campo electromagnético estabelecido (ver (III-13)), o mesmo não se passa com as cargas distribuídas sobre as superfícies de descontinuidade dos meios materiais.

III.7 — Corrente estacionária

Vimos já que o campo electromagnético estacionário se caracteriza por não variarem, no decurso do tempo, em cada ponto, os vectores campo eléctrico e campo magnético:

$$\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}=0 \quad , \quad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 .$$

Daqui resulta, necessariamente, que as distribuições de carga também não variam com o tempo:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0 \quad ; \quad \frac{\partial\sigma}{\partial t}=0 .$$

As equações de conservação da carga eléctrica (III-4), (III-5) e (III-5) impõem, então, que para a corrente estacionária se tenha:

— em todo o ponto interior de um condutor

(III-18) $\quad \operatorname{div} \vec{J} = 0$;

— na superfície de separação de dois meios condutores

(III-19) $\quad \vec{n} \cdot (\vec{J}_2 - \vec{J}_1) = 0$;

— e na superfície fronteira de um condutor com um isolante

(III-20) $\quad \vec{n} \cdot \vec{J} = 0$.

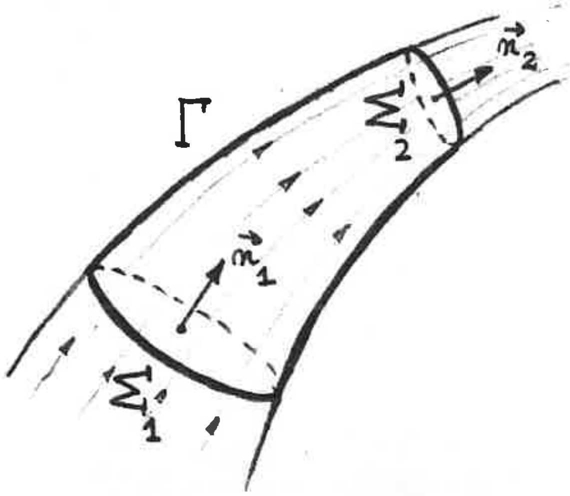
A equação (III-18) diz-nos que o campo dos vectores $\vec{J}$ é solenoidal, em corrente estacionária.

A relação (III-20) diz-nos que, na superfície limítrofe de um condutor, percorrido por corrente estacionária, $\vec{J}$ é permanente tangencial; a superfície limítrofe constitue, portanto um tubo de linhas de força de $\vec{J}$.

Ainda por efeito de (III-18), o fluxo de $\vec{J}$ que sai de uma superfície fechada qualquer, é nulo. Vejamos o que daqui resulta no que respeita ao fluxo de $\vec{J}$ através de uma qualquer secção do condutor.

Consideremos um troço de um qualquer tubo de linhas de força de $\vec{J}$ no condutor, limitado pelas Σ'_1 e Σ'_2, teremos:

(III-21)
$$\int_{\Sigma'_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{n}_1 \, d\Sigma'_1 = \int_{\Sigma'_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{n}_2 \, d\Sigma'_2$$



como é imposto pelo facto de ser nulo o fluxo que sai da superfície $(\Sigma'_1 + \Sigma'_2 + \Gamma)$, em que Γ é o troço do tubo de linhas de força considerado e $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são semi-

-normais em o sentido do movimento das cargas. Isto significa que:

$$i_{\Sigma} = \int_{\Sigma} \vec{J}.\vec{n}\, d\Sigma$$

(recorde-se (III-3)) tem o mesmo valor para qualquer secção Σ de um tubo de linhas de força, e, em particular, para qualquer secção do condutor, visto que a sua superfície limítrofe é um tubo de linhas de força.

Diz-se que o fluxo do movimento das cargas eléctricas (ou o fluxo de $\vec{J}$) em corrente estacionária é um fluxo conservativo.

III.8 — Corrente estacionária em condutores homogéneos e isótropos

A. Propriedades do campo

A experiência mostra que no caso dos condutores homogéneos e isótropos, percorridos por correntes estacionárias, o campo eléctrico satisfaz ainda a equação:

(III-22) $$\mathrm{rot}\, \vec{E} = 0$$

o que equivale a afirmar que $\vec{E}$ deriva de um potencial escalar V,

(III-22') $$\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\, V,$$

como na Electrostática; mas, só em tais circunstâncias subsiste este carácter de campo electrostático; a equação (III-22) deixa de ser válida se a corrente não é estacionária ou se o condutor não é homogéneo.

Se se aplica a lei de Ohm (III-7) pode escrever-se:

(III-23) $$\vec{J} = -\,\sigma^{*}\,\mathrm{grad}\, V$$

e também se tem:

(III-23') $$\mathrm{rot}\, \vec{J} = 0$$

em que σ^* tem o mesmo valor em todos os pontos do condutor.

Por outro lado, nas mesmas circunstâncias, por força de (III-18) e da lei de Ohm (III-7), resulta que:

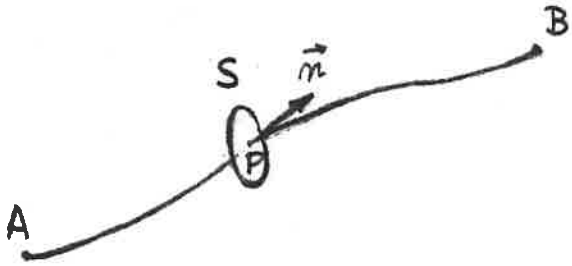
$$\text{(III-24)} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \qquad (\text{ou } \operatorname{lap} V = 0)$$

o que quer dizer que a equação fundamental (III-11), de validade geral, se cumpre aqui com $\rho = 0$ (porque ε tem o mesmo valor em todos os pontos do condutor). Podemos então afirmar que nos condutores homogéneos e isótropos percorridos por corrente estacionária, é constantemente nula a densidade volúmica de carga total (compare esta conclusão com a lei de dispersão tratada no parágrafo III.6). As cargas eléctricas responsáveis pelo potencial V só podem, portanto, achar-se distribuídas sobre as superfícies limítrofes dos condutores (com densidade $\sigma(x,y,z)$ independente do tempo.

B. Formas integrais das leis de Ohm e de Joule

1) Condutores filiformes

Um condutor filiforme, com dimensões transversais muito pequenas em face da dimensão longitudinal, pode supor-se gerado por uma superfície plana muito pequena, S, que se desloca, podendo em geral mudar de contorno e de área, mas mantendo-se constantemente normal a uma linha $[s]$ (ver figura). O condutor confunde-se práticamente com esta linha; designa-se por condutor filiforme (ou *fio condutor*).



Sendo o condutor homogéneo e isótropo, e sendo a corrente estacionária, a intensidade i (com o mesmo valor em qualquer secção recta), vem dada por:

$\vec{j} = -\sigma^* \operatorname{grad} V$

(III-25) $$i = -\sigma^* \int_S \vec{n} \cdot \operatorname{grad} V \, dS$$

que resulta de (III-3) e (III-23), expressão da lei de Ohm nas circunstâncias presentes; mas, nas condições de condutor filiforme, a quantidade $\vec{n} \cdot \operatorname{grad} V$ não varia sensivelmente de um ponto para outro da superfície S e pode tomar-se sempre com o valor que tem em P, sobre a linha [s]; por outro lado, tem-se $\vec{n} = \frac{d\vec{s}}{ds}$, se $d\vec{s}$ for o elemento de linha [s] no ponto P e $ds = |d\vec{s}|$. Então, (III-25) dá:

(III-26) $$i = -\frac{\sigma^* S}{ds} \, d\vec{s} \cdot \operatorname{grad} V = -\frac{\sigma^* S}{ds} \, dV$$

A grandeza:

(III-27) $$dr = \frac{ds}{\sigma^* S}$$

designa-se por <u>resistência eléctrica</u> do elemento <u>ds</u> do condutor filiforme; (III-26) reescreve-se então:

(III-26') $$i \, dr = -dV$$

e exprime a lei de Ohm para o elemento ds do fio. Se integrarmos entre as extremidades A e B do fio, vem:

(III-28) $$r i = V_A - V_B$$

em que:

(III-29) $$r = \int_A^B dr = \int_A^B \frac{ds}{\sigma^* S} = \frac{1}{\sigma^*} \int_A^B \frac{ds}{S}$$

é a resistência eléctrica do fio condutor de comprimento finito $\overline{AB}$.

A equação (III-28) traduz a lei de Ohm na sua forma original, directamente ligada à experiência.

No tocante à lei de Joule, a equação (III-9) transcreve-se fàcilmente para um elemento de fio condutor, se tomarmos $\vec{J}^2 = \left(\frac{i}{S}\right)^2$ com base nas mesmas considerações acima feitas e se tivermos em conta que $dv = S\, ds$. Se designarmos por dQ a quantidade de calor libertada por unidade de tempo no elemento ds, vem:

$$dQ = i^2\, dr \qquad \text{(III-30)}$$

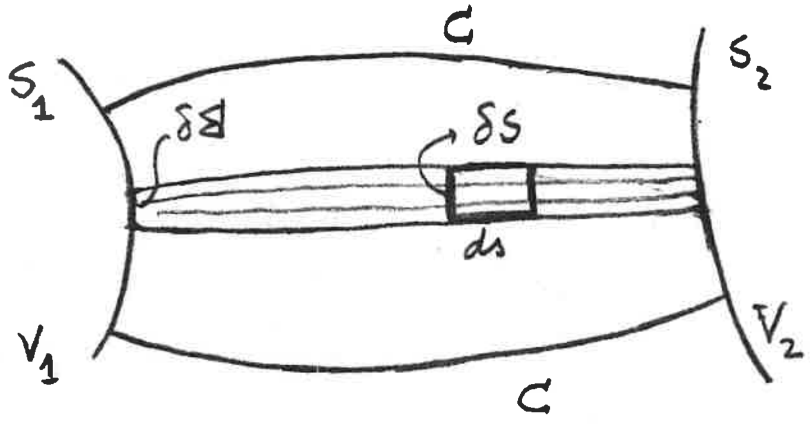
com dr dado por (III-27). A quantidade de calor libertada por unidade de tempo num fio condutor de comprimento finito $\overline{AB}$ vem dada por

$$Q = r\, i^2 \qquad \text{(III-31)}$$

que é a lei de Joule sob a sua forma original. 12/1/90

2) Condutor extenso contido entre dois eléctrodos

Consideremos agora um condutor extenso contido entre dois eléctrodos equipotenciais, S_1 e S_2, mantidos aos potenciais (invariáveis no tempo) V_1 e V_2, respectivamente, e limitado lateralmente por uma superfície C (ver figura).



Tomemos sobre S_1 um elemento de área $\delta\Sigma_i$ e o tubo filiforme das linhas de corrente que partem de $\delta\Sigma_i$. Assimilando este tubo de corrente a um condutor filiforme $\overline{AB}$, que decompomos em elementos ds (ver figura) podemos escreve por (III-28) e (III-29):

$$\text{(III-32)} \qquad \delta i = \frac{V_A - V_B}{\displaystyle\int_A^B \frac{ds}{\sigma^* \delta S}} \quad ;$$

mas δi, corrente que passa em qualquer δS, sempre a mesma, é também a corrente que entra no condutor através da base do tubo de corrente considerado; portanto, o integral do 1º membro de (III-32), sobre a superfície Σ' de contacto do condutor com o eléctrodo S_1, dá i, corrente global que entra no condutor. Por outro lado, para integrar o 2º membro sobre a mesma superfície Σ' deve atender-se à relação existente entre δS e $\delta\Sigma'$ (variável ao longo do filamento $\overline{AB}$), operando a substituição

$$\int_A^B \frac{ds}{\sigma^* \delta S} = \int_A^B \frac{ds}{\sigma^* \frac{\delta S}{\delta \Sigma'} \delta\Sigma'} = \frac{1}{\delta\Sigma'} \int_A^B \frac{1}{\sigma^*} \frac{\delta\Sigma'}{\delta S}\, ds$$

Então, de (III-32) resulta:

$$i = \int_{\Sigma'} \frac{V_A - V_B}{\displaystyle\int_A^B \frac{1}{\sigma^*}\frac{\delta\Sigma'}{\delta S}\, ds}\, \delta\Sigma'$$

$$\int_{\Sigma'} \delta i = \int_{\Sigma'} \frac{\delta i}{\delta\Sigma'}\, \delta\Sigma'$$

ou seja:

$$\text{(III-33)} \qquad R\, i = V_A - V_B$$

com:

$$\text{(III-34)} \qquad \frac{1}{R} = \int \frac{\delta\Sigma'}{\displaystyle\int_A^B \frac{1}{\sigma^*}\frac{\delta\Sigma'}{\delta S}\, ds}$$

ou:

$$(\text{III}-34') \qquad \frac{1}{R} = \sigma^* \int_{\Sigma_1} \frac{\delta \Sigma_1}{\int_A^B \frac{\delta \Sigma_1}{\delta s}\, ds}$$

no caso que nos ocupa (condutores homogéneos).

A equação (III-33) é a lei de Ohm sob forma integral para um condutor extenso contido entre dois eléctrodos; a sua analogia com a equação (III-28) leva-nos a atribuir à grandeza R definida por (III-34) o significado de resistência eléctrica de um tal condutor. Vê-se que R depende essencialmente da forma do condutor e da extensão, da forma, e da posição relativa dos eléctrodos que o confinam.

Passando à lei de Joule, se transcrevermos (III-31) para o tubo de corrente $\overline{AB}$ aqui considerado e tendo em conta (III-28), então a quantidade de calor $\underline{\delta Q}$ libertada por unidade de tempo no filamento $\overline{AB}$ de base $\delta\Sigma_1$ é

$$\delta Q = \delta i \, (V_A - V_B) \quad ;$$

integrando sobre toda a superfície Σ_1, vem:

$$(\text{III}-35) \qquad Q = i \, (V_A - V_B)$$

que combinado com (III-33) dá:

$$(\text{III}-35') \qquad Q = R\, i^2 \quad .$$

É a lei de Joule sob a forma integral para um condutor extenso contido entre dois eléctrodos.

III.9 — <u>Corrente estacionária em condutores isótropos não-homogéneos</u>

A. <u>Extensão da lei de Ohm</u>

A experiência mostra que nos condutores heterogéneos (com heterogeneidade material ou devida a um gradiente de temperatura) pode observar-se corrente estacionária em correlação com a existência de um campo electromotor não irrotacional.

Isso leva-nos a admitir que o campo pode comportar, além de um termo $\vec{E}^e$ de carácter electrostático como ocorre no caso dos condutores homogéneos ($\text{rot } \vec{E}^e = 0$), um novo termo $\vec{E}^a$ — campo aplicado ou campo de heterogeneidade — que existe sòmente onde há heterogeneidades e que não é, em geral, irrotacional ($\text{rot } \vec{E}^a \neq 0$).

Escreve-se em consequência:

$$(\text{III-36}) \qquad \vec{E} = \vec{E}^e + \vec{E}^a = -\text{grad } V + \vec{E}^a$$

e, se nos limitarmos aos condutores isótropos, a lei de Ohm toma então a forma

$$(\text{III-37}) \qquad \vec{J} = \sigma^* (-\text{grad } V + \vec{E}^a) = \sigma^* \vec{E}$$

que generaliza a equação (III-23) do parágrafo 8.A.

Note-se que a existência de heterogeneidades acarreta para a equação (III-37), não só o aparecimento de $\vec{E}^a$, mas, também, o facto de σ^* ser aí, agora, uma grandeza variável de ponto para ponto.

B. Propriedades do campo

As propriedades do campo descritas no parágrafo 8A. para os condutores homogéneos não subsistem, portanto, em geral. Tem-se:

$$(\text{III-38}) \qquad \text{rot } (\vec{E} - \vec{E}^a) = 0$$

em vez de $\text{rot } \vec{E} = 0$, porque:

$$(\text{III-39}) \qquad \text{rot } \vec{E} = \text{rot } \vec{E}^a \neq 0 \,.$$

Por outro lado, visto que a corrente é estacionária, continua a verificar-se:

(III-40) $$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad ;$$

mas isso implica agora

(III-41) $$\operatorname{div} (\sigma^* \vec{E}) = 0$$

em vez de $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ (Cf. § III.8-A).

Enfim, não esqueçamos que a equação

(III-42) $$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

se conserva aqui, como uma propriedade fundamental de todo o Electromagnetismo, e implica (por ser $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$):

(III-43) $$\operatorname{div} (\varepsilon \vec{E}) = \rho$$

As equações (III-38), (III-41) e (III-43) resumem as novas propriedades do campo.

O carácter não-irrotacional do campo [eq.(III-39)] faz da sua circulação uma <u>função de linha</u> (<u>não</u> dependente apenas do ponto de partida e do ponto de chegada, <u>mas</u> <u>essencialmente</u> dependente do percurso). Assume particular importância a sua circulação ao longo de uma curva fechada [c], que se designa genèricamente por <u>força electromotriz</u>, $\underline{\mathcal{E}}$, ao longo de [c]:

(III-44) $$\mathcal{E} = \oint_{[c]} \vec{E} . \vec{ds} \qquad \text{(f.e.m.)}$$

Mas, tendo em conta (III-36), a definição aqui feita de $\underline{\mathcal{E}}$ conduz imediatamente a:

(III-45) $$\mathcal{E} = \oint_{[c]} \vec{E}^a . \vec{ds} \quad ;$$

ou seja: <u>a força electromotriz ao longo da curva fechada [c] é a circulação (fechada) do campo $\vec{E}^a$ ao longo de [c]</u>.

C. <u>Electrização de um condutor heterogéneo pela corrente estacionária</u>

mas

Enquanto nos condutores homogéneos percorridos por corrente estacionária a densidade volúmica total das cargas eléctricas é nula ($\rho = 0$) (Cf § III. 8-A), nos condutores heterogéneos, ao contrário, a corrente estacionária produz em geral uma electrização de que vamos determinar a densidade volúmica.

$\rho = \operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}(\varepsilon\vec{E}) = \operatorname{div}\left(\frac{\varepsilon}{\sigma^*}\vec{J}\right) = (\varepsilon/\sigma^*)\underbrace{\operatorname{div}\vec{J}}_{0} + \operatorname{grad}\frac{\varepsilon}{\sigma^*}\cdot\vec{J}$

Basta tomar o jogo das seguintes quatro equações:

$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$; $\operatorname{div}\vec{J} = 0$; $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; e $\vec{J} = \sigma^*\vec{E}$;

e eliminar entre elas as grandezas $\vec{D}$ e $\vec{E}$ para deduzir a seguinte expressão de ρ:

(III-46) $$\rho = \vec{J}\cdot\operatorname{grad}\theta$$

sendo $\theta = \varepsilon/\sigma^*$, o tempo de relaxação, de que vimos já o significado físico, a propósito da lei da dispersão das cargas eléctricas nos condutores homogéneos e isótropos. No caso presente, θ varia em geral de ponto para ponto e existe portanto um $\operatorname{grad}\theta$ não-nulo.

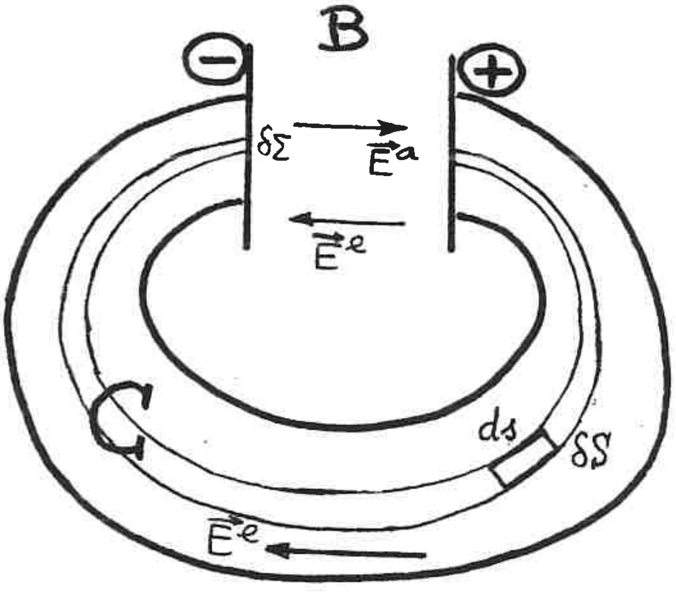
A eq. (III-46) mostra que se tem em geral $\rho \neq 0$, mas que, sob certas condições de heterogeneidade, poderá ocorrer $\rho = 0$. Vê-se ainda que a electrização se acha directamente relacionada com a corrente $\vec{J}$ que a gera. Pode também concluir-se, a partir da eq. (III-46), que é globalmente nula a carga eléctrica correspondente à referida electrização (a qual se estende a todo o volume do condutor). Tem-se com efeito:

(III-47) $$\int_v \rho\, dv = \int_v \vec{J}\cdot\operatorname{grad}\theta\, dv = 0$$

em que v é o volume global do condutor. A eq. (III-47) resulta de ser $\vec{J}$ um vector solenoidal ($\operatorname{div}\vec{J} = 0$) e $\operatorname{grad}\theta$ um vector irrotacional, cumprindo-se ainda na superfície limítrofe do condutor as seguintes condições: $\vec{J}\cdot\vec{n} = 0$ e θ finito ($\theta = \varepsilon/\sigma^*$).

D. Circuito eléctrico. Fórmulas de Ohm.

Consideremos um circuito eléctrico em que se acham incluídos condutores heterogéneos apresentando no seu interior campos aplicados. Suponhamos que a localização destes campos se confina a uma dada região B — bateria — limitada por dois eléctrodos — polos, positivo e negativo, da bateria —. Designemos por C o condutor (homogéneo) que contacta pelo exterior os polos da bateria (V. Figura).



Estudemos em primeiro lugar a situação em que o condutor exterior C não existe, não havendo portanto corrente, $\vec{J} = 0$. É a situação de circuito aberto. Tem-se então um equilíbrio electrostático caracterizado no interior da bateria por

(III-48) $$\vec{E} = -\operatorname{grad} V + \vec{E}^a = 0\,;$$

e em todo o ponto exterior está definido um campo electrostático.

$\mathcal{E} = \oint_{[c]} \vec{E}^a . \vec{ds}$ Nestas condições, se tomarmos (III-45) ao longo de uma curva [c] fechada que passe pela bateria e se utilizarmos (III-48), resulta:

(III-49) $$\mathcal{E} = \oint_{[c]} \vec{E}^a . \vec{ds} = \int_-^+ \vec{E}^a . \vec{ds} = \int_-^+ \operatorname{grad} V . \vec{ds} = V_+ - V_-$$

sendo este integral independente dos pontos tomados sobre os polos da bateria, que são dois eléctrodos equipotenciais, e, além disso, independente do percurso entre esses pontos. Assim, em circuito aberto, a f.e.m. aplicada iguala a diferença de potencial entre os polos da bateria.

Estudemos em segundo lugar a situação em que se fecha efectivamente o circuito através do condutor C; existe uma corrente regida pela lei de Ohm sob a forma (III-37). (É a situação de circuito fechado).

Calculemos a intensidade da corrente que entra, por exemplo, através do polo negativo. Para isso, dividamos este eléctrodo, de área Σ_1, em elementos $\delta\Sigma_1$ e tomemos o filamento de corrente que nasce em $\delta\Sigma_1$, de intensidade δi. Resulta:

$$\text{(III-50)} \qquad i = \int_{\Sigma_1} \delta i = \int_{\Sigma_1} \frac{\delta i}{\delta \Sigma_1}\, \delta\Sigma_1 .$$

Seja δS uma secção recta genérica do filamento considerado e $\vec{J}$ a densidade de corrente em δS; pode escrever-se:

no filamento de corrente $\vec{J}$ e $d\vec{s}$ mesma direcção

$$\delta i = |\vec{J}|\,\delta S = \sigma^* \left| -\text{grad}\, V + \vec{E}^a \right| \delta S = \frac{\sigma^* \delta S}{ds} (-\text{grad}\, V + \vec{E}^a) \cdot d\vec{s}$$

ou seja:

$$\text{(III-51)} \qquad \delta i \, \frac{ds}{\sigma^* \delta S} = (-\text{grad}\, V + \vec{E}^a) \cdot d\vec{s}$$

19/12/86

Integremos agora a equação (III-51) ao longo de um filamento:

1°) fechado no circuito global;
2°) aberto, no interior da bateria, indo do polo (−) ao polo (+);
3°) aberto, através do condutor C, indo do polo (+) ao polo (−).

Para o 1° caso vem:

$$\delta i \oint \frac{ds}{\sigma^* \delta S} = \oint (-\text{grad}\, V + \vec{E}^a) \cdot d\vec{s} = \int_-^+ \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = \mathcal{E}$$

O mesmo $\mathcal{E}$ para todo o tubo de corrente porque se admite que $\vec{E}^a$ é independente de $\vec{J}$, e já se viu atrás [illegible] mesmo para $\vec{J}=0$

ou seja:

$$\frac{\delta i}{\delta \Sigma_1'} = \frac{\mathcal{E}}{\oint \frac{1}{\sigma^*} \frac{\delta \Sigma_1'}{\delta S}\, ds}$$

e, entrando com esta expressão em (III-50), resulta, se se tem em conta a definição (III-34) do parágrafo 8.B.2):

$$(\text{III}-52) \qquad i\,R = \mathcal{E}$$

sendo R a resistência total do circuito. Este resultado constitui a 1ª fórmula de Ohm. 15/1/90

$$\frac{\delta i}{\delta \Sigma_1'} = \frac{\mathcal{E} - (V_+ - V_-)}{\int_-^+ \frac{1}{\sigma^*} \frac{\delta \Sigma_1'}{\delta S}\, ds}$$

No 2º caso, vem:

$$\frac{1}{R} = \sigma^* \int_{\Sigma_1'} \frac{\delta \Sigma_1'}{\int_A^B \frac{\delta \Sigma_1'}{\delta S}\, ds}$$

$$\delta i \int_-^+ \frac{ds}{\sigma^*\, \delta S} = \mathcal{E} - (V_+ - V_-)$$

$$i = \int_{\Sigma_1'} \frac{\delta i}{\delta \Sigma_1'}\, \delta \Sigma_1'$$

e o mesmo mecanismo utilizado no 1º caso conduz a:

$$(\text{III}-53) \qquad i\,R_B = \mathcal{E} - (V_+ - V_-) \implies V_+ - V_- = \mathcal{E} - i\,R_B$$

em que R_B é a resistência da bateria. Note-se que se tem aqui, em circuito fechado, uma diferença de potencial $V_+ - V^-$, que, pelo confronto de (III-53) com (III-49), é menor que a diferença de potencial em circuito aberto, $= \mathcal{E}$, como a experiência ensina.

A equação (III-53) é a 2º fórmula de Ohm.

Para o 3º caso teremos:

$$\delta i \int_+^- \frac{ds}{\sigma^*\, \delta S} = V_+ - V_-$$

($\vec{E}^a = 0$, no interior do condutor C) e analogamente aos dois primeiros casos:

$$(\text{III}-54) \qquad i\,R_C = V_+ - V_-$$

em que R_{C} é a resistência do condutor C.

A equação (III-54) constitui a <u>3.ª fórmula de Ohm</u>. Ela coincide, como era de esperar, com a equação (III-33), deduzida no estudo dos condutores homogéneos.

Se tomarmos (III-54) com (III-53) obtemos (III-52), o que significa que as fórmulas de Ohm (regendo o circuito fechado em corrente estacionária) se reduzem efectivamente a duas independentes.

15/12/88

mas

E. <u>Calor de Joule e actividade dos campos aplicados</u>

Ao movimento das cargas num condutor heterogéneo está associado um trabalho desenvolvido pelos campos aplicados. Se tomarmos no interior do condutor um elemento <u>ds</u> de um tubo filiforme de linhas de força de $\vec{J}$, de secção recta <u>δS</u> e percorrido pela corrente <u>δi</u>, o trabalho realizado, no volume $dv = \delta S\, ds$, por unidade de tempo, vale:

carga q atravessa δS / unidade de tempo

$$\delta i\, \vec{E}^{a} \cdot \vec{ds} = |\vec{J}|\, \delta S\, \vec{E}^{a} \cdot \vec{ds} = \vec{J} \cdot \vec{E}^{a}\, dv .$$

Se estendermos este cálculo a todo o circuito onde flui uma corrente $\vec{J}$ mantida pelos campos $\vec{E}^{a}$, obtemos:

$$(\text{III-55}) \qquad \mathcal{A} = \int_{v} \vec{J} \cdot \vec{E}^{a}\, dv$$

sendo v o volume global do circuito. <u>$\mathcal{A}$</u> é a <u>actividade dos campos aplicados</u>, no circuito.

Consideremos, agora o calor de Joule libertado na mesma unidade de tempo:

$$(\text{III-56}) \qquad Q = \int_{v} \frac{\vec{J}^{2}}{\sigma^{*}}\, dv = \int_{v} \vec{J} \cdot \vec{E}\, dv .$$

Comparemos as duas energias (III-55) e (III-56).

A sua diferença exprime-se por:

$$(\text{III-57}) \quad Q - \mathcal{A} = \int_v \vec{J} \cdot (\vec{E} - \vec{E}^a)\, dv$$

Sendo a corrente estacionária, temos $Q - \mathcal{A} = 0$. Com efeito, o integral do 2° membro de (III-57) anula-se porque a função integranda é o produto interno de um vector solenoidal ($\operatorname{div} \vec{J} = 0$) por um vector irrotacional, equação (III-38), sendo, sobre a fronteira do volume v, $\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$ e V função finita. A demonstração faz-se como segue:

$$\int_v \vec{J} \cdot (\vec{E} - \vec{E}^a)\, dv = \int_v \vec{J} \cdot (-\operatorname{grad} V)\, dv =$$

$$\left(\int_v \operatorname{div}(-V\vec{J})\, dv - \int_v (-V) \operatorname{div} \vec{J}\, dv \right)$$

$$= \int_v V \underbrace{\operatorname{div} \vec{J}}_{=0}\, dv - \int_S V \vec{J} \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

$\vec{J} \cdot \vec{n} = 0$ na superfície

Em conclusão, no regime estacionário, a actividade dos campos aplicados compensa, exactamente, a quantidade de calor libertado na unidade de tempo por efeito Joule no circuito global.

Esta afirmação traduz o princípio de conservação da energia em regime estacionário.

III.10 — Redes de condutores filiformes em regime estacionário

Um sistema de fios condutores ligados entre si pelas suas extremidades constitui uma rede de condutores filiformes. Os pontos de confluência de três ou mais fios designam-se por vértices ou nós; todo o fio ligando directamente dois vértices é um ramo; um grupo de ramos constituindo um circuito fechado designa-se por malha.

Suponhamos que há n ramos e que cada ramo α

tem uma resistência r_α; designemos por $\mathcal{E}_\alpha$ a f.e.m. (eventualmente nula) residindo no ramo α. A experiência mostra que, se todos os $\mathcal{E}_\alpha$ são constantes, a rede é percorrida por correntes estacionárias bem determinadas (i_α no ramo $\underline{\alpha}$, com $\alpha = 1, 2, \dots, n$).

O problema de uma rede nestas condições consiste, precisamente, em encontrar as relações bem definidas que devem então existir entre os $\mathcal{E}_\alpha$, os r_α e os i_α. Para resolvê-lo, utilizamos as _leis de Kirchhoff_, que vamos agora estabelecer.

A. Leis de Kirchhoff

1) Seja A um vértice da rede; nele concorrem vários ramos. Consideremos uma superfície S, fechada em torno de A e cortando os diversos ramos em secções $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_\beta, \dots$ (ver figura I). A corrente i_β, que _sai_ do vértice A pelo ramo β (através de Σ'_β) é dada por:

$$(\text{III-58}) \qquad i_\beta = \int_{\Sigma'_\beta} \vec{J}_\beta \cdot \vec{n}_\beta \, d\Sigma'_\beta$$

podendo ser negativa ou positiva consoante o sentido real da corrente é para dentro ou para fora da superfície fechada S.

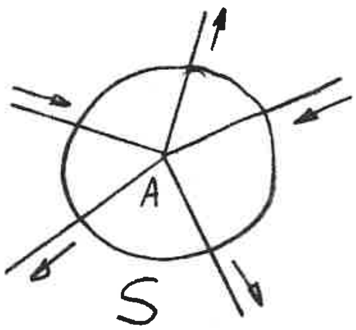


figura I-a

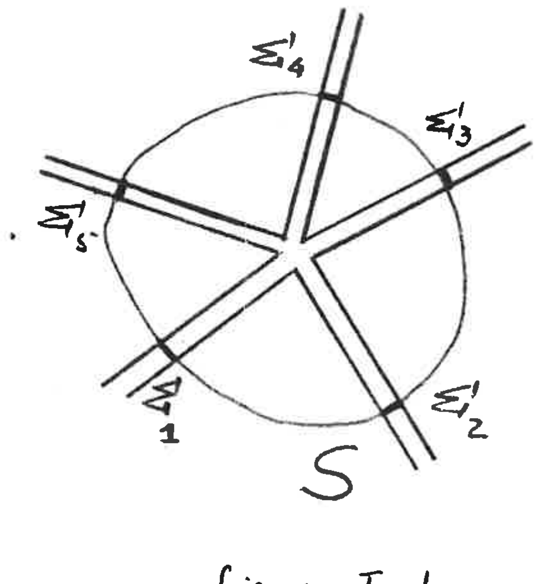


figura I-b

Por ser div $\vec{J} = 0$ (regime estacionário) temos:

$$\int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

e como só as secções Σ'_β dos condutores contribuem para este fluxo, vem:

(III-59) $$\sum_\beta \int_{\Sigma'_\beta} \vec{J}_\beta \cdot \vec{n}_\beta \, d\Sigma'_\beta = 0$$

De (III-58) e (III-59) resulta:

(III-60) $$\sum_\beta i_\beta = 0$$

É a primeira lei de Kirchhoff: a soma algébrica das correntes de todos os ramos, que concorrem num vértice é nula.

2) Seja agora a malha [ABCD] uma malha da rede, como a esquematizada na figura II. Utilizemos a lei de Ohm, equação (III-37), $\vec{J} = \sigma^*(-\text{grad}\, V + \vec{E}^a)$ para calcular a circulação do campo ao longo de cada um dos ramos. Pode escrever-se, por exemplo para o ramo AB:

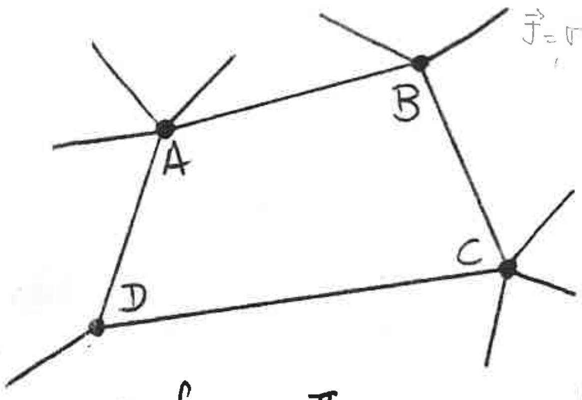


figura - II

$$\int_A^B \vec{E}^a \cdot d\vec{s} - \int_A^B \frac{1}{\sigma^*} \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \text{grad}\, V \cdot d\vec{s}$$

e é fácil verificar que:

a) $$\int_A^B \vec{E}^a \cdot d\vec{s} = \mathcal{E}_{AB}$$ (definição de f.e.m.)

$= \vec{J} d\vec{s} = i_{AB} \frac{ds}{S}$

b) $\displaystyle\int_A^B \frac{1}{\sigma^*} \vec{J} \cdot d\vec{s} = i_{AB} \int_A^B \frac{ds}{\sigma^* S} = i_{AB}\, r_{AB}$

(Cf. estudo dos condutores filiformes, 8B-1)

c) $\displaystyle\int_A^B \operatorname{grad} V \cdot d\vec{s} = V_B - V_A$

Donde resulta que, para o ramo $\overline{AB}$:

(III-61) $$\mathcal{E}_{AB} - i_{AB}\, r_{AB} = V_B - V_A \quad ;$$

e, analogamente para os outros ramos.

Ora, se somarmos as relações (III-61) obtidas para todos os ramos da malha considerada, tomando sempre o mesmo sentido de circulação, vem

(III-62) $$\sum_{\gamma} \left(\mathcal{E}_{\gamma} - r_{\gamma}\, i_{\gamma} \right) = 0$$

visto que os 2os membros se destroem mutuamente.

É a segunda lei de Kirchhoff: ao longo de uma malha, para um dado sentido de circulação, a soma algébrica das f.e.m.s, inseridas nos diversos ramos, iguala a soma algébrica dos produtos das resistências dos ramos pelas respectivas intensidades de corrente.

B. Intensidades independentes e malhas fundamentais

Importa agora discutir como se devem aproveitar as equações resultantes da aplicação das duas leis de Kirchhoff aos diferentes nós e às diferentes malhas, respectivamente.

Continuemos a supor que há n ramos e seja k o número de nós.

A 1ª lei de Kirchhoff fornece k equações do tipo (III-60) — uma para cada nó — mas essas equações ~~não~~ não são todas independentes. Com efeito, como cada ramo liga dois nós, cada intensidade de corrente acha-se representada, no conjunto dessas K equações, duas e só duas vezes, e com sinais contrários porque se a corrente converge num vértice diverge do outro. Assim, a soma das K equações, membro a membro, origina a identidade $0 = 0$. Segue-se que o nº de equações independentes que é possível escrever, com base na 1ª lei de Kirchhoff é $\underline{K-1}$.

Então, das n intensidades das correntes que percorrem os diferentes ramos, por estarem assim ligadas por $K-1$ equações independentes, resultam $n-K+1$ intensidades independentes.

Por outro lado, haverá tantas equações do tipo (III-62) quantas as malhas que pudermos considerar na rede, mas, estas equações estão longe de ser todas independentes. É fácil verificar, por exemplo, que no troço de rede representado na figura III, a 2ª lei de Kirchhoff se traduz para

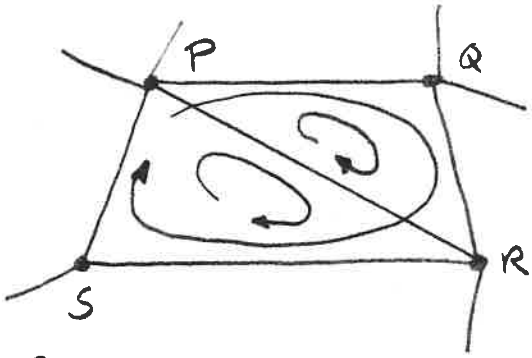


figura III

a malha [PQRS] numa equação que é a soma, membro a membro, das equações geradas, pela mesma lei, para as duas malhas [PQR] e [PRS]: destas três malhas só duas são independentes.

Para as redes mais simples (ponte de Wheatstone, ponte dupla de Kelvin, por exemplo), é fácil encontrar, na prática, as malhas que fornecem as equações independentes — as malhas fundamentais. Para o caso geral, porém, a determinação, por via teórica, do número de malhas fundamentais, a partir do número de ramos e do número de nós da rede, é problema mais delicado, de carácter topológico, que se pode assimilar ao problema da relação entre o número de faces, o número de vértices e o número de arestas de um poliedro. Demonstra-se que o número $\underline{\nu}$ de malhas fundamentais de uma rede com $\underline{n}$ ramos e K vértices é dado por:

$$\nu = n - K + 1 \qquad (\text{III}-63)$$

Pode assim concluir-se que, quando esgotada a aplicação das leis de Kirchhoff a uma rede, ficamos a dispor de $\underline{n-K+1}$ equações independentes em $\underline{n-K+1}$ intensidades independentes. O sistema de equações lineares, desta maneira constituído, é determinado: admite uma e uma só solução.

16/1/90

G. <u>Princípio de sobreposição de estados estacionários. Teorema de Thévenin</u>

Porque as equações resultantes das leis de Kirchhoff são lineares em relação às intensidades e às f.e.m.s, nós podemos afirmar que toda a sobreposição de estados estacionários de uma rede é ainda um estado estacionário na mesma rede.

A sobreposição de estados estacionários acarreta que se somem, para cada ramo da rede, as intensidades e as f.e.m.s dos estados sobrepostos; em todo o ponto da rede o potencial resultante da sobreposição é também a soma dos potenciais dos estados sobrepostos. Ressalve-se todavia que, quando da introdução ou da supressão de uma f.e.m., se torna imprescindível repor, no valor que possuía antes, a resistência do ramo em causa.

Como uma consequência deste princípio de sobreposição, podemos afirmar, em particular, que, numa rede em que estão instaladas certas f.e.m.s, a intensidade em cada ramo é igual à soma das intensidades obtidas quando essas f.e.m.s se inserem individualmente.

Passemos ao importante teorema de Thévenin, que se fundamenta ainda no princípio de sobreposição dos estados estacionários numa rede.

Sejam A e B dois pontos quaisquer de uma rede arbitrariamente complexa, onde os potenciais assumem actualmente os valores V_A e V_B respectivamente. Admitamos como conhecida a resistência $\underline{R}$ da rede⊛ medida entre os dois pontos A e B tomados como eléctrodos. Suponhamos agora que fazemos uma ligação, exterior à rede, entre os pontos A e B por um fio de resistência $\underline{r}$ (ver figura IV)

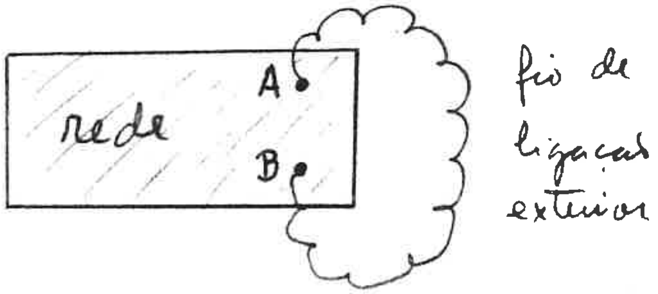


figura IV

Nestas condições, o teorema de Thévenin afirma que a corrente $\underline{i}$ que percorre o fio vem dada por:

$$(\text{III-64}) \qquad i = \frac{V_A - V_B}{R + r}$$

Como uma consequência, a diferença de potencial entre A e B, depois da ligação pelo fio, será:

$$V'_A - V'_B = i r$$

Para demonstrar este teorema, vamos considerar dois estados estacionários, de cuja sobreposição resulta o estado que se obtém após a ligação dos pontos A e B pelo fio.

Como primeiro estado estacionário, I, consideremos o que se estabelece quando os pontos A e B são ligados

---

⊛ Ver, no fim do parágrafo, a noção de resistência equivalente da rede entre dois pontos tomados como eléctrodos.

pelo fio mas ao mesmo tempo inserimos no próprio fio uma f.e.m. $\mathcal{E}_I = -(V_A - V_B)$ que compensa a diferença de potencial preexistente entre os pontos A e B. Nestas condições, a corrente no fio é nula e tudo se passa como se ele não existisse. O estado I é o estado primitivo da rede.

Como segundo estado estacionário, II, consideramos o que se estabelece quando suprimimos na rede todas as f.e.m.s e ao mesmo tempo criamos no fio uma f.e.m. $\mathcal{E}_{II} = +(V_A - V_B)$. É claro que nestas condições a intensidade da corrente no fio será (1ª fórmula de Ohm em circuito fechado, parágrafo 9D): $i_{II} = \mathcal{E}_{II}/(R+r)$.

É evidente que da sobreposição dos dois estados estacionários resulta a situação referida: as f.e.m.s na rede são as do estado I (no estado II não há f.e.m.s na rede) e a f.e.m. no fio é agora nula, pois $\mathcal{E}_I + \mathcal{E}_{II} = 0$. Como no fio é $i_I = 0$ e $i_{II} = \dfrac{\mathcal{E}_{II}}{R+r} = \dfrac{V_A - V_B}{R+r}$, resulta:

$$i = i_I + i_{II} = \frac{V_A - V_B}{R+r},$$

como queríamos demonstrar.

Notemos que qualquer rede pode, assim, ser considerada como uma bateria de polos em 2 pontos arbitrários A e B, sendo a f.e.m. dessa bateria igual à diferença de potencial entre esses pontos, $V_A - V_B$, e a sua resistência interna a resistência equivalente da rede entre os mesmos pontos.

A relação, já atrás referida,

$$V'_A - V'_B = i\,r \qquad \text{(III-65)}$$

dá a diferença de potencial entre os polos da mesma bateria em circuito fechado.

Resistência equivalente entre dois pontos de uma rede, tomados como eléctrodos.

Consideremos uma rede de condutores, esquemàticamente representada na figura V-1 pelo rectângulo tracejado, e sejam A e B dois dos seus pontos que tomaremos como eléctrodos. Suponhamos que estão suprimidas todas as f.e.m.s

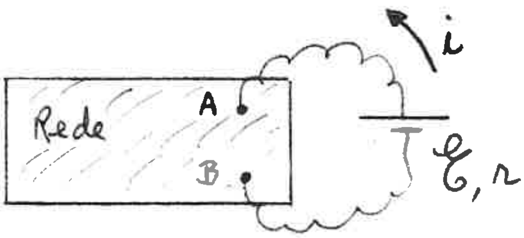


figura V-1

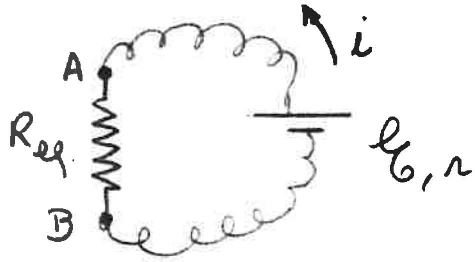


figura V-2

da rede nos seus diferentes ramos (encontrando-se, no entanto, reposta em cada ramo a sua resistência própria).

Liguemos os dois pontos A e B aos polos de uma bateria exterior à rede de f. e. m. $\mathcal{E}$; seja r a resistência interna da bateria. Suponhamos que nestas condições a bateria debita uma intensidade $\underline{i}$.

Imaginemos, agora, que, em substituição da rede, considerávamos um condutor único cujos terminais A e B ligávamos aos polos da mesma bateria (figura V-2)

Resistência equivalente da rede entre os seus dois pontos A e B, tomados como eléctrodos, $R_{eq.}$, é a resistência que deveria ter esse condutor único para que, neste segundo circuito, a bateria debitasse a mesma corrente $\underline{i}$ que no primeiro.

Tem-se, por aplicação da fórmula de Ohm ao segundo circuito:

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r} \quad ,$$

donde resulta que o valor de $\underline{R_{eq}}$ se pode achar a partir dos valores de $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{r}$, supostos dados, e do valor de $\underline{i}$ obtido mediante a realização do primeiro circuito (fig. V-1).

Pode verificar-se, com base na teoria das redes de condutores atrás exposta, que a definição acima, de R_{eq}, conduz, para cada par de pontos A e B, tomados na rede, a uma grandeza bem determinada, independente de $\underline{\mathcal{E}}$ e $\underline{r}$ (que são arbitrários) e, portanto, função exclusiva das resistências dos ramos da rede.