CURSO DE TEORIA DE STURM LIOUVILLE E FUNÇÕES ESPECIAIS
com exercícios resolvidos

José Vassalo Pereira

Versão não revista pelo autor dos apontamentos que disponibilizou aos alunos do curso ministrado em 1973 no Instituto Hidrográfico, recuperados por José Pedro Mimoso em 2021. Os conteúdos integraram algumas edições dos cursos de Métodos Matemáticos leccionados pelo autor no DF-FCUL.

Problema de Sturm-Liouville.

Funções especiais.

1. O problema de Sturm-Liouville. Introdução.
2. Problema de Sturm-Liouville e estacionaridade.
3. Valores próprios da equação de Sturm-Liouville. Completicidade.
4. Funções especiais. Introdução.
5. O método de integração por séries. Equação de Legendre.
6. Polinómios de Legendre.
7. Teorema de Fuchs
8. Equação de Mathieu.
9. Teorema de Floquet.

Bibliografia

E.C. Kemble, *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, London, 1937

E.L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, N. York, 1926

R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol I., Interscience, N. York, 1961

H. Margenau, G.M. Murphy, *The Mathematics of Physics and Chemistry*, Van Nostrand, N. York, 1951

E. Coddington, N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, London 1955

A. Angot, *Compléments de Mathématiques etc*, Masson, Paris 1970

§1. O problema de Sturm-Liouville. Introdução.

O problema de Sturm-Liouville (abreviat.: S.-L.), tal como aqui o apresentamos, consiste no estudo das propriedades da equação diferencial de 2.ª ordem

(1) $$p u'' + p' u' - q u + \lambda w u = 0$$

e das suas soluções $u(x)$. Em (1), λ é uma constante, p, q, w e u são funções de x (variável independente, real). As plicas designam, naturalm.te, as derivadas em ordem a x. Supomos sempre que $\boxed{w(x) \geq 0}$ $\forall x$ (por razões que adiante serão evidentes, esta função $w(x)$ designa-se por "função de peso"). Quanto ao domínio de variação da variável x, assumimos que é o de um certo intervalo finito (a, b).

O grande interesse da Teoria de Sturm-Liouville provém do facto de que muitas das mais importantes equações diferenciais da Física Matemática são equações da forma (1) (ou a ela redutíveis por transformação de variáveis) e de que, em consequência, as conclusões gerais que se podem estabelecer partindo de (1) têm uma extensa repercussão em inúmeros casos particulares de grande utilidade prática.

As funções p, q e $w \geq 0$ são conhecidas, características de cada problema particular, bem como o domínio de variação de x, (a, b). As hipóteses adicionais que ao longo do nosso estudo formos fazendo acerca de p, q e w serão oportunamente salientadas.

Como já várias vezes temos visto, a determinação da solução de um problema traduzido por uma equação diferencial depende essencialm.te das condições aos limites a que tem de satisfazer essa solução. Assim, consoante o tipo de condições aos limites em cada problema particular de S.-L., teremos soluções muito diversas para (1). De uma maneira geral supomos porém que essas condições aos limites são sempre da seguinte forma:

→

(2) $\forall\, u, v$, soluções de (1)(*), tem-se

$$[p u v']_a = [p u v']_b = 0 \qquad \left(\text{e :: trocando } u \text{ e } v,\ [p v u']_{a,b} = 0\right).$$

ou seja: nos extremos do intervalo ou p ou as soluções de (1) ou as suas derivadas são $= 0$. Estas condições, muito gerais, contêm, em particular, o caso habitual em que a solução se anula aos limites.

Escrevamos a eq. de S.-L. sob a forma

(1') $$L(u) + \lambda w u = 0 \quad , \quad \text{onde}$$

$$L(u) \equiv (pu')' - qu = p'u' + pu'' - qu$$

é o operador diferencial linear de 2ª ordem que à função $u(x)$ faz corresponder a função $pu'' + p'u' - qu$. De uma maneira geral, um operador diferencial linear de 2ª ordem é um operador (caracterizado por três funções f, g, h) que à função $\forall\, u(x)$ faz corresponder: $D: u(x) \to D(u) = f u'' + g u' + h u$.
É evidente que tal operador é linear (c/efeito: $D(au + bv) =$
$= f(au+bv)'' + g(au+bv)' + h(au+bv) = a f u'' + b f v'' + a g u' + b g v' + a h u + b h v =$
$= a(fu'' + gu' + hu) + b(fv'' + gv' + hv) = a D(u) + b D(v)$). No caso do operador L da eq. de S.L., $g = f'$.

Como é fácil verificar, L é um operador hermítico. Com efeito (**)

$$(L(u), v) = ((pu')' - qu, v) = \int (pu')'v - \int quv = \text{integ. por}$$

é necessário aqui uma H. de continuidade!

partes $= [pu'v] - \int pu'v' - \int quv$. Atendendo a (2) o 1º termo é nulo.

(**) Como neste estudo utilizamos apenas funções reais, a noção de produto interno (bem como as que dele decorrem, p. ex., a noção de hermiticidade) simplifica-se aqui notavelmente.

(*) Estas condições, exigidas para as soluções de (1), serão aliás quase sempre exigidas com todas as funções com que tentarmos de trabalhar, sejam ou não soluções de (1).

→ ∴ HE de continuidade!

Integrando novamente por partes, vem

$$= \left[-u \cdot p v'\right] + \int u \cdot (p v')' - \int q u v = (\text{por }(2)) =$$

$$= \int (p v')' u - \int q v u = (L(v), u) \quad \text{cqd.}$$

Vimos assim que L é hermítico, ou melhor, que um operador diferencial de 2ª ordem com $g = f'$ é hermítico. Pode facilmente mostrar-se o inverso, ou seja, que dado um operador diferencial de 2ª ordem ($D: u \to D(u) = fu'' + gu' + hu$) hermítico, se tem $g = f'$.

Temos então, por HE, $\forall u$ e v (sujeitas apenas às condições (2). Cf. nota pág. anterior)

$(D(u), v) = (u, D(v))$ ou seja

$\int (fu'' + gu' + hu) v = \int (fv'' + gv' + hv) u$. Integrando por partes e atendendo a (2), o 1º. $\int$ vem

$\int u (fv)'' - \int u (gv)' + \int h u v =$

Ou seja, desenvolvendo as derivadas

$$\int u \left(fv'' + 2f'v' - gv' + f''v - g'v + hv\right) = \int u \left(fv'' + gv' + hv\right)$$

$$\int u \left[fv'' + (2f' - g) v' + (f'' - g' + h) v\right] = \int u \left(fv'' + gv' + hv\right)$$

Como u e v são funções $\forall$, segue-se que os integrandos são $=$s.

Donde $\begin{cases} 2f' - g = g \\ f'' - g' + h = h \end{cases} \Rightarrow f' = g$ cqd.

Concluindo.

Teor.: é CNS para que um operador diferencial de 2ª ordem $D: u \to D(u) = fu'' + gu' + hu$ seja hermítico que se tenha $f' = g$. (É, como já se viu, o caso do operador L de S.-L.).

Tendo em conta o que precede vai agora mostrar-se que

Teor. Dado um operador diferencial de 2ª ordem $\forall$, $D: u \to D(u) = fu'' + gu' + hu$, o operador $e^{\int \frac{g - f'}{f}} D$ (isto é, o operador que se obtém de D multiplicando-o à esquerda por $e^{\int \frac{g - f'}{f}} \equiv K(x)$) é hermítico.

Temos portanto de demonstrar que, sendo u e v, funções que obedecem apenas a (2), se tem $\quad (u, KD(v)) = (KD(u), v) \quad$ Com efeito

$$(u, KD(v)) = \int u K(fv''+gv'+hv) = (\text{por partes}) =$$

$$= \underset{0}{\cancel{[v'\cdot ukf]}} - \int v'\cdot(ukf)' + \underset{0}{\cancel{[v\cdot ukg]}} - \int v(ukg)' + \int ukhv \quad = (\text{por partes})$$

$$= -\underset{0}{\cancel{[v(ukf)']}} + \int v(ukf)'' - \int v(ukg)' + \int ukhv \quad = \text{desenvolvendo as derivadas} =$$

$$= \int\{v[u'kf+uk'f+ukf']' - v[u'kg+uk'g+ukg'] + ukhv\} = \ldots^{(*)} =$$

$$= \int v\left[u''kf + u'(2k'f+2kf'-kg) + u(k''f+2k'f'+kf''-k'g-kg'+kh)\right]$$

Ora tem-se

$$K(x) \equiv e^{\int \frac{g-f'}{f}} \qquad \text{donde}$$

$$K'(x) = K\cdot\frac{g-f'}{f}$$

$$K''(x) = K'\frac{g-f'}{f} + K\cdot\frac{(g'-f'')f-(g-f')f'}{f^2} =$$

$$= k\frac{(g-f')^2}{f^2} + k\frac{(g'f-f''f-gf'+f'^2)}{f^2} \quad \text{Substituindo, vem}$$

$$= \int v\Big[u''fk + u'k\big(\overbrace{2f\,\frac{g-f'}{f} + 2f'-g}^{=g}\big) + uk\Big(f\frac{(g-f')^2}{f^2} + f\frac{(g'f-f''f-gf'+f'^2)}{f^2} +$$

$$+ 2f'\frac{g-f'}{f} + f'' - g\frac{g-f'}{f} - g' + h\Big)\Big]$$

$$= \int v\Big[u''fk + u'kg + uk\Big(\cancel{\frac{g^2}{f}} - 2\frac{gf'}{f} + \boxed{\frac{f'^2}{f}} + \cancel{g'} - \cancel{f''} - \frac{gf'}{f} + \boxed{\frac{f'^2}{f}} + \frac{2f'g}{f} - \boxed{2\frac{f'^2}{f}} + \cancel{f''} - \cancel{\frac{g^2}{f}} + \frac{gf'}{f} - \cancel{g'} + h\Big)\Big]$$

$(*)$ $\int v(u''kf + 2u'k'f + 2u'kf' + \cancel{u'k'f} + uk''f + 2uk'f' + \cancel{u'kf''} + uk'f' + ukf'') -$
$- v(u'kg + uk'g + ukg') + ukhv$

$$= \int v\left[u''fK + u'Kg + uKh\right] = \int \frac{K}{f}\left(fu'' + gu' + hu\right)v =$$

$$= \left(KD(u), v\right) \quad \text{cqd.}$$

Este resultado permite dar ainda uma maior generalidade à teoria de S.L. Com efeito, considerando uma equação diferencial de 2.ª ordem da forma $fu'' + gu' + hu + \lambda wu = 0$, em que f, g e h são $\forall$ (∴ o operador $D: u \to D(u) = fu'' + gu' + hu$ não é necessariamente hermítico) dá-se, por multiplicação à esquerda por $K(x) = e^{\int \frac{g - f'}{f}}$, $KD(u) + \lambda Kwu = 0$ ou seja, fica na forma $L(u) + \lambda w_1 u = 0$ em que, atendendo ao que precede, L é agora um operador hermítico. Reduz-se, portanto, a uma equação do tipo (1) de S.-L.

$\hookrightarrow L: u \to L(u) = Fu'' + F'u' - Qu.$

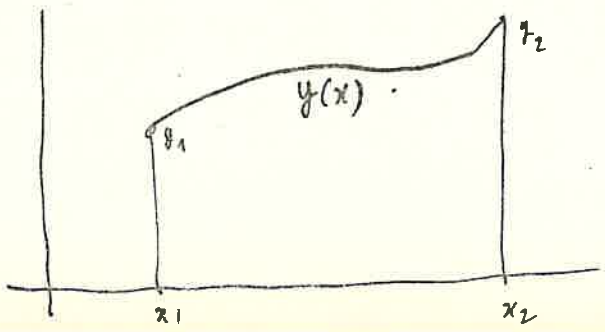
Noções elementares de cálculo de variações

Um dos problemas do cálculo diferencial é o de achar os máximos e mínimos de uma função $y(x)$, isto é, os seus valores estacionários. Como se sabe, a condição necessária para que $y(x)$ tenha um valor estacionário no ponto $x = x_0$ é que $y'_{x=x_0} = 0$. (Além disto, se fôr $y''_{x=x_0} > 0$ teremos um mínimo e se $y''_{x=x_0} < 0$ um máximo). O cálculo das variações ocupa-se de um problema semelhante, se bem que mais complicado: o de achar uma função $y(x)$ tal que o integral de uma função de função I seja máximo ou mínimo.

Consideremos então uma função contínua, I, dependendo da função $y(x)$, da sua derivada $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, e de x: $I = I(y, y', x)$. Consoante a expressão escolhida para $y(x)$, assim o integral definido

(1) $$\int_{x_1}^{x_2} I(y, y', x)\, dx$$

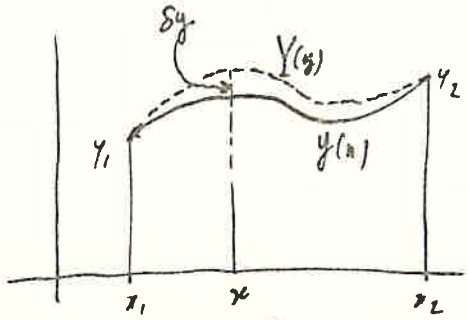
terá um certo valor. O que se pretende é então achar a forma da função $y(x)$ tal que o integral (1) seja estacionário, isto é, máximo ou mínimo. Naturalmente, $y(x)$ — e $y'(x)$ — estão definidas em (x_1, x_2). x_1 e x_2 são fixos e neles $y(x)$ toma certos valores — é aliás, a única coisa que sabemos de $y(x)$ por enquanto. Para cada uma das diferentes funções $y(x)$ — i.e. para cada uma das diferentes trajectórias que ligam os pontos $x_1 y_1$ e $x_2 y_2$ — o integral (1) toma um certo valor. Para uma certa trajectória $y(x)$, que representamos na figura, esse valor será estacionário. $y(x)$ diz-se então a "trajectória estacionária".



Suponhamos que traçamos uma outra trajectória, diferente de y mas muito pouco diferente, que designamos por $Y(x)$. (É claro que $Y(x)$ também é uma trajectória que une os pontos $x_1 y_1$ e $x_2 y_2$)

$Y(x)$ é portanto uma trajectória "adjacente" à trajectória estacionária $y(x)$;

A função $Y(x) - y(x)$ toma, pelo que se disse, valores muito pequenos, infinitesimais, para todos os valores de x em (x_1, x_2). Definimos então



$$\delta y(x) \equiv Y(x) - y(x)$$ e analogamente

$$\delta I \equiv I(Y, Y', x) - I(y, y', x)$$

O símbolo δ é designado por variação: ele representa o aumento da quantidade a que está aplicado, quando se passa da trajectória estacionária para outra trajectória, adjacente, muito pouco diferente daquela (no mesmo valor de x, claro). Obviamente, $\delta x = 0$. Calculemos agora $\delta \frac{dy}{dx}$:

$$\delta \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} - \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(Y - y) = \frac{d}{dx}\delta y.$$

Este resultado mostra que os dois símbolos — o de variação e o da derivada — comutam. Por outro lado, como os δy e $\delta y'$ são valores muito pequenos, temos, pelo que precede, que

$$\delta I = I(Y, Y', x) - I(y, y', x) = I(y + \delta y, y' + \delta y', x) - I(y, y', x) =$$

$$= (\text{Taylor}) = \frac{\partial I}{\partial y}\delta y + \frac{\partial I}{\partial y'}\delta y'$$

Ou seja, as regras formais que permitem calcular as variações δ, "grosso modo", as mesmas que nos dão os diferenciais.

Posto isto, a condição de estacionaridade (máximo ou mínimo) de $\int_{x_1}^{x_2} I\, dx$, escreve-se sem dificuldade: ela traduzirá simplesmente o facto de que o integral $\int I$ calculado com y (trajectória estacionária) dê o mesmo valor que calculado com $y + \delta y$ (trajectória adjacente)

5c

(2) ou seja,

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta I \, dx = 0$$

(Cf. a condição correspondente, no cálculo diferencial, de estacionaridade de $y(x)$ num dado ponto $x = x_0$: é que, nesse ponto seja $dy = 0$ — isto é: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0} = 0$)

A equação (2) escreve-se então, tendo em conta o exposto,

$$0 = \int_{x_1}^{x_2} \delta I \, dx = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial I}{\partial y}\delta y + \frac{\partial I}{\partial y'}\delta y'\right] dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial I}{\partial y}\delta y + \frac{\partial I}{\partial y'}\frac{d}{dx}\delta y\right] dx .$$

Ocupando-nos agora do integrando daí, por integração por partes,

$$\left[\delta y \frac{\partial I}{\partial y'}\right]_{x_1}^{x_2} - \int \delta y \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial I}{\partial y'}\right) dx$$

Como é, por construção $\delta y_{x=x_1} = \delta y_{x=x_2} = 0$ (verifique atrás) segue-se que a condição de estacionaridade de $\int I \, dx$ vem

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial I}{\partial y'}\right)\delta y \, dx = 0$$

Como $\delta y(x)$ é uma função qualquer de x (se bem que de valores muito pequenos) isto implica que

$$\boxed{(*)\quad \frac{\partial I}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial I}{\partial y'} = 0}$$

equação de Euler.

Esta é a condição pretendida. Como $I = I(y, y'(x))$ é uma função conhecida de y, y', x (p. ex.), esta equação permite obter a forma de $y(x)$ · Toda função $y(x)$ assim definida torna estacionário

c/ efeito, se o 1º membro da equação de Euler não fosse nulo para todos os valores de x entre, poderíamos considerar um $\delta y(x) \gtreqless 0$, de tal modo que se > 0 num dado ponto de (x_1, x_2) e < 0 noutro para que a equação fique satisfeita. Mas bastava tomarmos então δy — que fosse < 0 onde (*) fosse < 0 e > 0 onde (*) fosse > 0, para termos o integral resultando sempre $\neq 0$, contra o que ali se diz!

o integral $\int_{x_1}^{x_2} I(y y' x)\,dx$. $y(x)$ diz-se então um extremo 5d

Caso de várias variáveis dependentes

O que precede generaliza-se sem dificuldade para o caso de I depender, já não apenas de uma variável dependente $y(x)$ (e de sua derivada), mas de várias var. dependentes $y_1(x)$ $y_2(x)$ .... (e das suas derivadas $y_1'(x)$, $y_2'(x)$, ...). Resumimos os resultados obtidos, deixando os detalhes como exercícios:

O que se pretende é então obter a expressão das funções $y_1(x), y_2(x), \ldots$ que tornam estacionário o integral

$$\int_{x_1}^{x_2} I(y_1 y_2 \cdots y_1' y_2' \cdots, x)\,dx$$

A condição de estacionaridade é, como anteriormente,

(*) $$\int_{x_1}^{x_2} \delta I\,dx = 0 .$$

Mas tem-se agora, evidentemente,

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial y_1}\delta y_1 + \frac{\partial I}{\partial y_2}\delta y_2 + \cdots + \frac{\partial I}{\partial y_1'}\delta y_1' + \frac{\partial I}{\partial y_2'}\delta y_2' + \cdots$$

Ao calcular o $\int$ (*) temos novamente integração por partes, por exemplo:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I}{\partial y_1'}\delta y'\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial I}{\partial y_1'}\frac{d}{dx}(\delta y)\,dx = \left[\frac{\partial I}{\partial y_1'}\delta y_1\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial I}{\partial y_1'}\right)\delta y_1\,dx$$

e, como anteriormente, δy_1 anula-se nos limites. Então pelo (*) vem assim:

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\left(\frac{\partial I}{\partial y_1} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial I}{\partial y_1'}\right)\right)\delta y_1 + \left(\frac{\partial I}{\partial y_2} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial I}{\partial y_2'}\right)\right)\delta y_2 + \cdots\right]dx = 0$$

Sendo $\delta y_1, \delta y_2 \ldots$ funções independentes e arbitrárias de x, cada um dos parêntesis anula-se separadamente. Em consequência, obtemos, não uma única equação de Euler, mas tantas quantas as variáveis depen-

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial y_1} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial I}{\partial y'_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial I}{\partial y_2} - \dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial I}{\partial y'_2} = 0 \\ \vdots \end{cases}$$

Equações de Euler

Caso de várias variáveis independentes

A generalização é também imediata no caso de termos várias variáveis independentes $x_1\, x_2 \dots$ isto é, $y = y(x_1, x_2, x_3 \dots)$ e ~~[illegible]~~

$I = I\left(y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, x_1, x_2 \dots\right)$. Neste caso, o problema que se põe é o de obter uma função $y(x_1 x_2 \dots)$ das variáveis $x_1, x_2 \dots$ tal que seja estacionário o integral (múltiplo!)

$\boxed{\partial_k y \equiv \dfrac{\partial y}{\partial x_k}}$

$$(*) \qquad \int\!\!\int \cdots \int_{x'_2}^{x''_2} \int_{x'_1}^{x''_1} I(y, \partial_1 y, \partial_2 y, \dots x_1, x_2, \dots)\, dx_1\, dx_2 \dots$$

A condição de estacionaridade é a mesma, claro:

$$\cdots \int\!\!\int\!\!\int \delta I \; dx_1\, dx_2 \cdots = 0$$

É evidente que agora δy representa o incremento resultante da passagem do extremo y para uma função adjacente Y, nos mesmos pontos $x_1 x_2 x_3 \dots$ (i.e.: c/ $x_1\, x_2\, x_3 \dots$ fixos). Por conseguinte $\delta x_1 = \delta x_2 = \dots = 0$. Temos:

$$\delta I = \frac{\partial I}{\partial y}\delta y + \frac{\partial I}{\partial(\partial_1 y)}\delta(\partial_1 y) + \frac{\partial I}{\partial(\partial_2 y)}\delta(\partial_2 y) + \dots\dots$$

Ao calcularmos, por ex., o integral $\cdots \int\!\!\int \frac{\partial I}{\partial(\partial_1 y)}\delta(\partial_1 y)\, dx_1 dx_2 \dots$, fazemos primeiro uma integração em x_1, e obtém-se, por partes,

$$\int_{x_1'}^{x_1''} \frac{\partial I}{\partial(\partial_1 y)} \frac{\partial}{\partial x_1}(\delta y)\, dx_1 = 0 - \int_{x_1'}^{x_1''} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial I}{\partial(\partial_1 y)}\right)\delta y\, dx_1$$

O integral (*) fica então

$$\dots \iiint \left(\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial I}{\partial(\partial_1 y)} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial I}{\partial(\partial_2 y)} - \dots\right)\delta y\, dx_1 dx_2 dx_3 \dots$$

Obtemos assim a correspondente eq. de Euler:

$$\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial I}{\partial(\partial_1 y)} - \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial I}{\partial(\partial_2 y)} - \dots = 0$$

Condições adicionais. Os multiplicadores de Lagrange

Em certos problemas de Geometria e de Física pretende-se tornar estacionário o integral de uma função de certas variáveis ao mesmo tempo que se impõe a constância de certos integrais onde intervêm as mesmas variáveis. Um exemplo disto é o problema em que se pretende achar a curva plana fechada de perímetro dado e de área máxima. (isoperimétrico)

Em geral, quando há a considerar condições adicionais, utiliza-se o chamado "método dos multiplicadores de Lagrange" que passamos a expor:

Suponhamos que se pretende determinar o valor estacionário do integral

$$\int I(y\,y'\,x)\,dx \qquad (*)$$

, sendo ao mesmo tempo

$$\int I_1\, dx = c_1, \quad \int I_2\, dx = c_2, \quad \dots \quad \int I_m\, dx = c_m$$

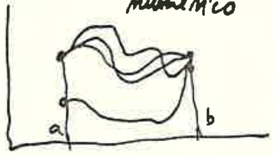
(*) Para simplificar, consideramos apenas uma var. independente e uma var. dependente. Para o caso de um número superior, o processo é óbvio.

Alguns resultados sobre estacionaridade

a) as condições de Euler

Seja um dado intervalo finito (a,b) — que será sempre o mesmo em todo o que se segue — e uma função conhecida $I = I(y, y', x)$ em que $y = y(x)$ e y' é a derivada de y em relação à variável independente x, real. Para cada função $y(x)$ em (a,b), obtemos para $I = I(y\,y'\,x)$ uma certa expressão e, por conseguinte, um certo valor numérico para o integral

(1) $$\int_a^b I(y, y', x)\,dx \,.$$



Tomando diferentes funções $y(x)$ obtemos assim diferentes valores numéricos para este integral que aparece assim como um "funcional" de função y.

Interessa-nos agora saber qual, dentre todas as funções $y(x)$ definidas em (a,b), aquela que torna estacionário (máx. ou mín.) o integral acima referido. Essa função é determinada (a demonstração pode encontrar-se em tratado de Análise) pela chamada condição de Euler: a função $y(x)$ que torna estacionário $\int I$ é dada por

(2) $$\frac{\partial I}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial I}{\partial y'} = 0$$

equação que permite obter (pelo menos em princípio) a forma explícita de y em função de x, atendendo a que I é função conhecida de y, y' e x.

b) os multiplicadores de Lagrange

Nos problemas de estacionaridade condicionada pretende-se determinar quais, dentre as funções que obedecem a uma ou várias condições (daí a designação) quais as que tornam estacionária uma certa expressão onde intervêm essas funções. Tomando um caso particular importante (que será utilizado neste curso) suponhamos que estamos interessados em determinar as funções $y(x)$ que tornam estacionário o integral →

1) $\int I(y, y', x)$

obedecendo ao mesmo tempo a certas condições adicionais expressas por certos integrais

3) $\int I_1 = c_1 \quad , \int I_2 = c_2 \quad , \ldots \quad \int I_n = c_n \quad .$

($I_1, I_2 \ldots I_n$ são funções conhecidas de y, y' e x , os c_k são constantes e os $\int\int$ são calculados todos no mesmo intervalo (a, b) onde tb estão definidas as funções $y(x)$ a determinar).

A forma que neste caso toma a condição de Euler é idêntica à anterior, (2), apenas com I substituído por

4) $K = I + \lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \ldots + \lambda_n I_n$

onde os λ_n (os chamados multiplicadores de Lagrange) são certas constantes que, em princípio, se podem determinar por 3) e pela nova forma das condições de Euler, que é

5) $\frac{\partial K}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial K}{\partial y'} = 0$

(omitimos a demonstração)

Majorana

1.704

705

§2. Problema de Sturm-Liouville e estacionaridade

No que se segue vamos mostrar que o problema de S.L. se pode apresentar numa maneira equivalente que faz intervir o cálculo das variações. Seja então um problema dado por uma eq. de S.L.

(1) $$(pu')' - qu + \lambda w u = 0$$

com $w(x) \gtrless 0$, $p(x)$, $q(x)$ certas funções dadas, caracterizando o problema, e definidas no intervalo finito (a,b).

Procuremos saber agora — utilizando os métodos do cálculo das variações — quais são, dentre as funções $u(x)$ que obedecem à condição

(3) $$\int_a^b I_1 \equiv \int_a^b w u^2 = 1,$$

as que tornam estacionário o integral

(2) $$\Delta(u) \equiv \int_a^b I(u, u', x) \equiv \int_a^b (pu'^2 + qu^2)$$

Ora as condições de Euler, aplicadas a este problema, dão-nos

$$\frac{\partial K}{\partial u} - \left(\frac{\partial K}{\partial u'}\right)' = 0 \qquad \text{com} \quad K \equiv I - \lambda I_1 = pu'^2 + qu^2 - \lambda w u^2$$

(λ é, como se sabe, um multiplicador de Lagrange. Pode facilmente ser determinado pela equação de Euler e pela condição adicional (3)). Donde

$$-\cancel{2}qu \pm \cancel{2}\lambda w u \pm (\cancel{2} p u')' = 0 \qquad \text{isto é}$$

$$\boxed{(pu')' - qu + \lambda w u = 0}$$, que é a própria equação de S.L.

Em conclusão: o problema de Sturm Liouville reduz-se a um problema de estacionaridade. Determinar as soluções $u(x)$ de uma eq. de S.L. (1) — em que são dados p, q, w — é como se vê equivalente a procurar as funções $u(x)$ que tornam estacionário (máx. ou min.) o integral (2) e que obedecem à condição (3). O parâmetro λ que intervém como um valor próprio na eq. de S.L. (1) surge, no problema de estacionaridade correspondente, como um multiplicador de Lagrange.

É aliás fácil determinar quais são esses valores numéricos estacionários (máx. e mín.) que se obtêm para $\Delta(u)$ quando nesta se introduzem as funções $u_k(x)$, soluções da eq. de S.L. (correspondentes aos valores próprios λ_k).

$$\Delta(u_k) = \int I(u_k, u'_k, x) = \int (\underbrace{p u'^2_k}_{p u'_k \cdot u'_k} + q u_k^2) = \text{partes} =$$

$$= \underbrace{\cancel{[u_k \cdot p u'_k]}}_{\substack{= \\ 0 \\ \text{cf. (2) do } \S 1}} - \int u_k (p u'_k)' + \int q u_k^2 = \Big[\text{como } u_k \text{ é solução de S.L., sempre que } (p u'_k)' = q u_k - \lambda_k w u_k\Big] = -\int q u_k^2 + \lambda_k \overbrace{\int w u_k^2}^{=1} + \int q u_k^2 =$$

$$(\text{por (3)}) = \lambda_k \quad \therefore \quad \Delta(u_k) = \lambda_k .$$

__Em resumo__ : __o integral $\Delta(u)$ é estacionário para as soluções de S.L. $u_k(x)$ e os valores numéricos (máx. e mín.) que toma então são os valores próprios λ_k correspondentes a essas soluções.__

Tendo em conta as noções conhecidas dos espaços de funções com métrica (isto é, dotados de produto interno) — as quais se simplificam neste estudo onde apenas consideramos funções reais —, a condição (3) exprime simplesmente a __normalização__ das funções $\sqrt{w}\, u$ ou, "grosso modo", da função $u(x)$, solução da eq. de S.L., afectada da "__função de peso__" $\sqrt{w(x)}$.

Pode aliás ver-se fácil.te que estas funções $\sqrt{w}\, u_k$ são ortogonais entre si ou, mais precisamente, que

__Teorema__ : __Sendo u_n e u_m soluções da eq. de S.L. correspondentes a valores próprios $\neq$s, λ_n e λ_m, tem-se__ $\int w u_n u_m = 0$.

→

Com efeito, tem-se

$$L(u_n) + \lambda_n w u_n = 0$$

$$L(u_m) + \lambda_m w u_m = 0 .$$

Utilizando um processo bem conhecido tem-se, multiplicando a 1ª equação por u_m, a 2ª por u_n e integrando ambas

$$\left(u_m, L(u_n)\right) + \lambda_n \int w u_n u_m = 0$$

$$\left(u_n, L(u_m)\right) + \lambda_m \int w u_n u_m = 0$$

Como L é hermítico $\left((u_m, Lu_n) = (Lu_m, u_n) \right)$ segue-se, por subtracção,

$$(\lambda_n - \lambda_m) \int w u_n u_m = 0 \qquad \text{e como } \lambda_n \neq \lambda_m$$

$$\Rightarrow \int w u_n u_m = 0 \quad \text{cqd} .$$

É interessante reencontrar este resultado utilizando a via equivalente que decorre da estacionaridade do integral (2):

Já mostrámos que as soluções da eq. de S.L. são as funções $u(x)$ que estacionarizam Δ e que obedecem à condição de normalização (3). Como se viu, a eq. de S.L. surge então como a condição de Euler da estacionaridade de Δ. Em princípio seria de esperar que se procurássemos as funções que obedecem às condições anteriores (3) e (2) e mais à de serem ortogonais entre si (i.é, mais precisamente, $\int u_n u_m w = 0$; $u_n \neq u_m$), as funções encontradas já não fossem as soluções da eq. de S.L. visto que, em princípio, as condições de Euler são agora outras. O que se vai ver é que, apesar disso, as condições de Euler são as mesmas e, portanto, que somos conduzidos novamente às soluções de S.L. . Quer isto dizer que não é necessário exigir a condição de ortogonalidade e que, com ou sem ela, somos sempre levados às soluções da eq. de S.L. isto é: elas verificam automaticamente a condição de ortogonalidade $\int w u_n u_m = 0$. É o que vamos mostrar:

"Procuremos as funções $u_m(x)$ que

(1) minimizem (*) $\int p u_m'^2 + q u_m^2 = \Delta(u_m)$

e que, além disto, obedeçam às condições —o

(*) o que se segue transpõe-se sem dificuldade para o caso dos máximos.

(2) $\int w u_n^2 = 1$ (de normalização)

e

(3) $\int w u_n u_m = 0$ (de ortogonalidade)

Seja $u_1(x)$ a funç obedecendo a (1) e (2) (∴ normalizada e minimizando Δ) que dá o menor mínimo para Δ. Designemos por $u_2(x)$ a função obedecendo a (1) (2) e (3) isto é, ortogonal a u_1 $\left(\int u_1 u_2 w = 0\right)$, normalizada e que dá um mínimo para Δ. Como dissemos u_1 dá o menor mínimo para Δ, donde $\Delta(u_2) > \Delta(u_1)$.

Como se sabe, as condições de Euler para $u_2(x)$ são:

$$\frac{\partial K}{\partial u_2} - \left(\frac{\partial K}{\partial u_2'}\right)' = 0 \quad \text{com} \quad K \equiv I - \lambda_2 w u_2^2 - \mu w u_1 u_2$$

$$= p u_2'^2 + q u_2^2 - \lambda_2 w u_2^2 - \mu w u_1 u_2 .$$

(λ_2 e μ são os multiplicadores de Lagrange correspondendo às condições (2) e (3))

Ou seja

$$2 q u_2 - 2\lambda_2 w u_2 - \mu w u_1 - (2 p u_2')' = 0 \quad \text{isto é}$$

$$0 = (p u_2')' - q u_2 + \lambda_2 w u_2 + \frac{\mu}{2} w u_1 \equiv L(u_2) + \lambda_2 w u_2 + \frac{\mu}{2} w u_1$$

Esta condição de Euler parece diferente de uma equaç de Sturm-Liouville. Mas tal não acontece efectivamente pois que $\mu = 0$, como se vai ver.

devido à existência do termo $\frac{\mu}{2} w u_1$.

Multiplicando a equaç anterior por u_2 e integrando, vem

$$(u_1, L(u_2)) + \lambda_2 \int w u_1 u_2 + \frac{\mu}{2} \int w u_1^2 = 0 .$$

Por hipótese, u_2 obedece à condição de ortogonalidade (3), donde

$$(u_1, L(u_2)) + \frac{\mu}{2} \int w u_1^2 = 0$$

Atendendo à hermiticidade de L, é $(u_1, L(u_2)) = (L(u_1), u_2)$ e como u_1 é soluç da eq. de S.L. (*), $(u_1, L(u_2)) = (-\lambda_1 w u_1, u_2) = -\lambda_1 \int w u_1 u_2$ que é $= 0$ (u_1 e u_2 são ortogonais).

Resta-nos portanto $\frac{\mu}{2} \int w u_1^2 = 0$ e como $\int u_1^2 w = 1 \neq 0$ $\Rightarrow$

(*) $u_1(x)$ obedece apenas a (1) e (2) ∴, pelo atrás demonstrado, é soluç de eq. de S.L. O mesmo pode, em princípio, não suceder com u_2 que obedece a (1) e às condições (2) e (3).

$\Rightarrow \mu = 0$ cqd.

∴ a condição de Euler é a mesma (a equação de S.L.) quer se exija ou não a condição de ortogonalidade (3). Ou seja, u_2 é dada apenas por ~~[illegible]~~ (1) e (2) e, portanto, é solução da eq. de S.L. e (3) é sempre automàticamente verificada.

O processo anterior pode aplicar-se a um nº qualquer de funções. Exemplifiquemos com três funções. Mais precisamente:

Sejam 2 funções $u_1(x)$ e $u_2(x)$ soluções da eq. de S.L. [podem ser por exemplo, as funções da demonstração anterior] com valores próprios λ_1 e λ_2. Pelo que vimos, u_1 e u_2 obedecem ~~[illegible]~~ a (1) e (2) e são automàticamente ortogonais: $\int w u_1 u_2 = 0$.

Procuremos a forma da condição de Euler para uma função $u_3(x)$ obedecendo a (1) (2) e mais às condições

$$(3') \quad \int w u_1 u_3 = 0 \qquad (u_3 \text{ ortogonal a } u_1)$$

$$(3'') \quad \int w u_2 u_3 = 0 \qquad (\text{" " " } u_2).$$

A condição de Euler é agora

$$\frac{\partial K}{\partial u_3} - \left(\frac{\partial K}{\partial u_3'}\right)' = 0 \qquad \text{com } K = p u_3'^2 + q u_3^2 - \lambda_3 w u_3^2 - \mu w u_3 u_1 - \nu w u_3 u_2$$

ou seja

$$2 q u_3 - 2\lambda_3 w u_3 - \mu w u_1 - \nu w u_2 - (2 p u_3')' = 0 \quad \text{, donde}$$

$$0 = (p u_3')' - q u_3 + \lambda_3 w u_3 + \frac{\mu}{2} w u_1 + \frac{\nu}{2} w u_2 = L(u_3) + \lambda_3 w u_3 + \frac{\mu}{2} w u_1 + \frac{\nu}{2} w u_2$$

equação que só se reduzirá a uma eq. de S.L se $\mu = \nu = 0$ que é, com efeito, o que sucede, como se vai ver. Multiplicando-a por u_1 e integrando, vem

$$(u_1, L(u_3)) + \lambda_3 \underbrace{\int w u_1 u_3}_{\substack{0 \\ \text{p.H.}}} + \frac{\mu}{2} \int w u_1^2 + \frac{\nu}{2} \underbrace{\int w u_1 u_2}_{\substack{0 \\ \text{p.H.}}} = 0 .$$

Multiplicando-a por u_2 e integrando vem,

$$(u_2, L(u_3)) + \lambda_3 \underbrace{\int w u_2 u_3}_{0} + \frac{\mu}{2} \underbrace{\int w u_1 u_2}_{\substack{0 \\ \text{p.H.}}} + \frac{\nu}{2} \int w u_2^2 = 0$$

Atendendo às H Ξ e à hermiticidade de L,

$$(u_1, L(u_3)) = (L(u_1), u_3) = -\lambda_1 (w u_1, u_3) = -\lambda_1 \int w u_1 u_3 = 0$$

$$(u_2, L(u_3)) = (L(u_2), u_3) = \cancel{\geq} -\lambda_2 (w u_2, u_3) = -\lambda_2 \int w u_2 u_3 = 0$$

Substituindo nas equações obtidas acima, vêm estas

$$\frac{\mu}{2}\int w u_1^2 = 0 \qquad \text{e como} \quad \int w u_1^2 = \int w u_2^2 = 1 \neq 0$$

$$\frac{\nu}{2}\int w u_2^2 = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \nu = 0 \quad \text{cqd}$$

Quer isto dizer que a condição de Euler para u_3 é a equação de S.L. habitual, ou seja, u_3 é solução da eq. de S. L. e automaticamente ortogonal a u_1 e u_2, quer essa condição de ortogonalidade seja ou não explicitamente exigida.

a. $\boxed{pu'' + p'u' + (\lambda w - q)u = 0}$ $\qquad p, q, w, u\ u'\ u''\ (x)$

Mudança de variável dependente

$$u_{(x)} \longrightarrow z_{(x)} = (pw)^{1/4} u$$

$$\therefore \quad u = (pw)^{-1/4} z$$

$$u' = -\tfrac{1}{4}(pw)^{-5/4}(p'w + pw')z + (pw)^{-1/4} z' = (pw)^{-1/4} z' - \frac{1}{4}\frac{p'w + pw'}{(pw)^{5/4}} z$$

$$u'' = -\frac{1}{4}\left[\frac{(p''w + 2p'w' + pw'')(pw)^{5/4}}{(pw)^{5/2}} - \frac{(p'w + pw')\,\frac{5}{4}(pw)^{1/4}(p'w + pw')}{(pw)^{5/2}}\right] z -$$

$$- \frac{1}{4}\frac{p'w + pw'}{(pw)^{5/4}} z' + (pw)^{-1/4} z'' - \frac{1}{4}(pw)^{-5/4}(p'w + pw') z'$$

$$= (pw)^{-1/4} z'' - \frac{p'w + pw'}{2(pw)^{5/4}} z' - \frac{1}{4}\left[\frac{p''w + 2p'w' + pw''}{(pw)^{5/4}} - \frac{5}{4}\frac{(p'w + pw')^2}{(pw)^{9/4}}\right] z$$

$$\therefore \quad 0 = pu'' + p'u' + (\lambda w - q)u \Rightarrow$$

$$0 = p(pw)^{-1/4} z'' - \frac{p}{2}\frac{p'w + pw'}{(pw)^{5/4}} z' - \frac{p}{4}\left[\frac{p''w + 2p'w' + pw''}{(pw)^{5/4}} - \frac{5}{4}\frac{(p'w + pw')^2}{(pw)^{9/4}}\right] z +$$

$$+ p'(pw)^{-1/4} z' - \frac{p'}{4}\frac{p'w + pw'}{(pw)^{5/4}} z + (\lambda w - q)(pw)^{-1/4} z = 0$$

$$\therefore \boxed{pz'' + \left[-\frac{p'w + pw'}{2w} + p'\right] z' + \left[\lambda w - q - \frac{p'}{4}\frac{p'w + pw'}{pw} - \frac{p''w + 2p'w' + pw''}{4w} + \frac{5}{16}\frac{(p'w + pw')^2}{pw^2}\right] z = 0}$$

Mudança de variável independente

$$x \longrightarrow t = \int_a^x \left(\frac{w}{p}\right)^{1/2} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{dx} = \left(\frac{w}{p}\right)^{1/2}$$

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{w}\right)^{1/2} \frac{w'p - wp'}{p^2}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(\frac{w}{p}\right)^{1/2}\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{w}{p}\right)^{1/2} + \frac{d}{dt}\cdot\frac{d^2t}{dx^2} = \left(\frac{w}{p}\right)^{1/2}\cdot\frac{d^2}{dt^2}\cdot\left(\frac{w}{p}\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{w}\right)^{1/2}\frac{w'p - wp'}{p^2}\frac{d}{dt}$$

$$= \frac{w}{p}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{w}\right)^{1/2}\frac{w'p - wp'}{p^2}\frac{d}{dt} = \frac{w}{p}\frac{d^2}{dt^2} + \frac{\frac{dw}{dt}p - w\frac{dp}{dt}}{2p^2}\cdot\frac{d}{dt}$$

Ou seja, reservando as plicas para a derivação em ordem a x e os pontos para a derivação em ordem a t, vem

$$\left\| \begin{aligned} (\ )'' &= \frac{w}{p}(\ddot{\ }) + \frac{\dot{w}p - w\dot{p}}{2p^2}(\dot{\ }) \\ (\ )' &= \left(\frac{w}{p}\right)^{1/2}(\dot{\ }) \end{aligned} \right.$$

Substituindo estes resultados na equação do fim da página anterior, vem

$$p\left[\frac{w}{p}\ddot{z} + \frac{\dot{w}p - w\dot{p}}{2p^2}\dot{z}\right] + \left[-\left(\frac{w}{p}\right)^{1/2}\frac{(\dot{p}w + \dot{w}p)}{2w} + \left(\frac{w}{p}\right)^{1/2}\dot{p}\right]\left(\frac{w}{p}\right)^{1/2}\dot{z} + z\left\{\lambda w - q - \left(\frac{w}{p}\right)\frac{\dot{p}}{4}\frac{\dot{p}w + \dot{w}p}{pw} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{16}\left(\frac{w}{p}\right)\left(\frac{\dot{p}w + \dot{w}p}{pw^2}\right)^2 - \frac{1}{4w}\left[\frac{w}{4p}(\ddot{p}w + 2\dot{p}\dot{w} + p\ddot{w}) + \frac{\dot{w}p - w\dot{p}}{8w\,2p^2}(\dot{p}w + p\dot{w})\right]\right\} = 0$$

$\therefore$

$$w\ddot{z} + \cancel{\frac{\dot{w}p - w\dot{p}}{2p}}\dot{z} - \frac{w}{p}\frac{\dot{p}w + \cancel{p\dot{w}}}{2w}\dot{z} + \dot{p}\left(\frac{w}{p}\right)\dot{z} + z\left\{\lambda w - q - \frac{\dot{p}^2w + pp\dot{w}}{4p^2} + \frac{5}{16}\frac{(\dot{p}w + p\dot{w})^2}{p^2w} - \right.$$

$$\left. - \frac{\ddot{p}w + 2\dot{p}\dot{w} + p\ddot{w}}{4p} + \frac{(\dot{p}w)^2 - p^2\dot{w}^2}{8wp^2}\right\} = 0$$

$$\therefore w\ddot{z} - \frac{w\dot{p}}{2p}\dot{z} - \frac{\dot{p}w}{2p}\dot{z} + \frac{\dot{p}w}{p}\dot{z} + z\left\{\lambda w - q - \frac{\ddot{p}w + 2\dot{p}\dot{w} + p\ddot{w}}{4p} - \frac{\dot{p}^2w}{4p^2} - \frac{\dot{p}\dot{w}}{4p} + \frac{5}{16}\frac{\dot{p}^2w}{p^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{8}\frac{\dot{p}\dot{w}}{p} + \frac{5}{16}\frac{\dot{w}^2}{w} + \frac{\dot{p}^2w}{8p^2} - \frac{\dot{w}^2}{8w}\right\} = 0$$

$$w\ddot{z} + z\left\{\lambda w - q - \frac{\ddot{p} w + 2\dot{p}\dot{w} + p\ddot{w}}{4p} + \frac{3}{16}\frac{\dot{p}^2 w}{p^2} + \frac{3}{8}\frac{\dot{p}\dot{w}}{p} + \frac{3}{16}\frac{\dot{w}^2}{w}\right\} = 0$$

$$w\ddot{z} + z\left(\lambda w - q - \frac{\ddot{p} w + 2\dot{p}\dot{w} + p\ddot{w}}{4p} + \frac{3}{16}\frac{(\dot{p} w + p\dot{w})^2}{p^2 w}\right) = 0$$

Pode ~~[illegible]~~ ainda dar-se outra forma a esta eqn notando-se que

$$\frac{\ddot{(wp)^{1/4}}}{(wp)^{1/4}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{4}(wp)^{-3/4}(\dot{w}p + w\dot{p})\right)}{(wp)^{1/4}} = \frac{1}{4}(wp)^{-3/4}\frac{(\ddot{w}p + 2\dot{w}\dot{p} + w\ddot{p})}{(wp)^{1/4}} + \frac{1}{4}\left(-\frac{3}{4}\right)(wp)^{-7/4}\frac{(\dot{w}p + w\dot{p})^2}{(wp)^{1/4}}$$

$$= \frac{\ddot{p} w + 2\dot{p}\dot{w} + p\ddot{w}}{4pw} - \frac{3}{16}\frac{(\dot{p} w + w\dot{p})^2}{(wp)^2}$$

A eqn fica então

$$w\ddot{z} + z\left(\lambda w - q - w\frac{\ddot{(wp)^{1/4}}}{(wp)^{1/4}}\right) = 0$$ ou seja

$$\ddot{z} + \lambda z - \left(\frac{q}{w} + \frac{\ddot{(wp)^{1/4}}}{(wp)^{1/4}}\right) z = 0$$, que é da forma

$$\boxed{\ddot{z} + f(t) z + \lambda z = 0}$$

§3. Valores próprios da equação de Sturm-Liouville. Completicidade.

Para o que vai seguir-se é conveniente dar outra forma à equaç de St.-L. Esta forma equivalente obtém-se partindo da

(1) $$p u'' + p' u' + (\lambda w - q) u = 0$$

realizando as transformações

– de variável dependente : $u(x) \longrightarrow z(x) = (p w)^{1/4} u$

– de variável independente : $x \longrightarrow t = \int_a^x \left(\frac{w}{p}\right)^{1/2} dx$ (*).

Chega-se assim a uma equaç equivalente,

Muito cuidado! Para (1) como é a acima?

(1) $$\frac{d^2 z}{dt^2} - f(t) z + \lambda z = 0$$

onde $f(t)$ é uma funç limitada no intervalo de existência de t. Esta equaç, equivalente à eq. de Sturm-Liouville é também deste tipo, com $p = 1$, $w = 1$, $q = f(t)$ e é partindo dela que demonstraremos o seguinte

Teorema. Suponhamos os valores próprios da eq. de S. L. numerados crescentemente (i.e: $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots$). Temos então que

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n = \text{cte} \cdot n^2$$

A demonstração faz-se utilizando a equaç ~~de~~ geral!! Sturm Liouville,

(1) $$\ddot{z} - f(t) z + \lambda z = 0$$

e a equaç

(1') $$\ddot{z} + \lambda z = 0$$ que é um caso particular da anterior, ou seja,

(*) recordamos que em todo este estudo x está definido no mesmo intervalo finito (a, b)

é ainda uma eq. de St. L. com $p=1$, $w=1$, $q=0$. Portanto, como se sabe, os valores próprios de (1') são os mínimos valores que toma o integral

$$\Delta'(z) \equiv \int p\dot{z}^2 + qz^2 = \int \dot{z}^2 \qquad (\text{neste caso é } p=1, q=0).$$

Quanto aos valores próprios de (1) eles são, analogamente, os mínimos valores que toma o integral

$$\Delta(z) \equiv \int p\dot{z}^2 + qz^2 = \int \dot{z}^2 + fz^2 \qquad (\text{porque em (1) é } p=1, q=f)$$

$$\therefore \ \Delta(z) = \Delta'(z) + \int fz^2$$

Seja z_1 uma solução ~~ff~~ da eq. de S.L. (1'). Como se sabe, ela é então normalizada ($\int wz_1^2 = \int z_1^2 = 1$) e então minimiza Δ'. Em princípio, não minimiza Δ, ou seja, introduzida em $\Delta(z)$ não o faz necessariamente tomar um valor mínimo; isto é, por definição de mínimo,

$$\min \Delta(z) < \Delta(z_1) = \Delta'(z_1) + \int f z_1^2 < \Delta'(z_1) + \int |f| z_1^2 <$$

$$< \Delta'(z_1) + M\int z_1^2 = \Delta'(z_1) + M$$

(z_1 é normalizada, p.h.; M designa o máx $|f|$)

$$\therefore \ \min \Delta(z) < \Delta'(z_1) + M$$

Ora os mínimos de Δ e de Δ' são, como sabemos, os valores próprios λ_n e λ'_n de (1) e (1') e, por h., z_1 minimiza Δ'.

$\therefore \ \lambda_n = \lambda'_n + C_n$ c/ $C_n < M \ \forall n$

$$\therefore \ \lambda_n < \lambda'_n + M$$

ou seja, $\forall n$, os valores próprios de (1) e (1') diferem de uma quantidade finita. Ora os valores próprios λ'_n de (1') são bem conhecidos e são da forma

$$\lambda'_n = K \cdot n^2 \qquad \text{em que K é uma certa constante. (*)}$$

Portanto, designando por C_n uma outra constante, é $\forall n$, ($C_n < M \ \forall n$)

$$\lambda_n = \lambda'_n + C_n = Kn^2 + C_n \qquad \text{e, quando } n \to \infty,$$

$$\lambda_n \longrightarrow K n^2$$

cqd

(*) ver nota no fim da demonstração.

Nota: é claro que a solução — e por conseguinte os valores próprios — de uma eq. dif. dependem não só da forma desta (neste caso $\ddot{z}+\lambda' z=0$) mas também das condições aos limites e da natureza do intervalo de existência de x. ~~[illegible]~~ Assim, se $u(x)=0$ $x=a,b$ (i.e. $z(t)=0$ para $t=0$ e $t=\tau=\int_a^{x=b}\left(\frac{w}{p}\right)^{1/2}dx$) os valores próprios são $\lambda'_n = n^2\frac{\pi^2}{\tau^2}$. Como se vê, é importante supor que τ é finito, senão o que a transformação de variáveis transformasse (a,b) num int. ∞ e os valores próprios deixaram de ser estes. (se bem que $\lambda_n \to \infty$ com $n \to \infty$).

Antes de prosseguir vamos introduzir no nosso estudo a noção de sistema completo de funções. Esta noção é muito semelhante à de base de um espaço de funções (~~[illegible]~~) podendo dizer-se, um pouco livremente que se trata de uma versão mais restrita daquela.

Assim, relembrando o caso bem conhecido do espaço de funções nas condições de Dirichlet definidas em $(-\pi,\pi)$, sabemos que os $\phi_k \equiv \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ constituem base para esse espaço ou seja que, dada uma função f desse espaço, f, se pode escrever $f=\sum^{\infty} c_k\phi_k$. Como o somatório é uma série (o espaço tem dimensão infinita) a igualdade traduz portanto o resultado de uma passagem ao limite:

$$f=\lim_{n\to\infty}\psi_n \qquad \text{com} \quad \psi_n=\sum^{n} c_k\phi_k .$$

O estudo da convergência da série é portanto um problema de grande importância e sabemos (cf. análise harmónica) que, para o caso das funções f nas cond. de Dirichlet a convergência é pontual (sem o que a igualdade não teria sentido) e até mesmo uniforme no intervalo considerado, se f for contínua.

Naturalmente, se ψ_n tende pontualmente para f então $f-\psi_n \to 0$ e a norma de $f-\psi_n$ tende igualmente para zero (norma de $F \equiv \|F\| = \int FF^*$ ou, no caso de funções reais, $\int F^2$). Mas o inverso não é verdadeiro ou seja, pode a norma de $f-\psi_n$ tender para zero sem que ψ_n convirja pontualmente para f ou melhor:

(1) $\lim_{n\to\infty}\|f-\psi_n\|=0$ não implica

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = f$ (ie: $\lim\limits_{n\to\infty} (f-\psi_n) = 0$)

É o que se pretende significar dizendo que a convergência em norma (ou em média quadrática), traduzida por (1) não implica a convergência pontual, habitual, traduzida por (2). No exemplo que aqui escolhemos (séries de Fourier) o conjunto das funções $\phi_k = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ é tal que com certos coeficientes c_k, $\psi_n = \sum^n c_k\phi_k$ tende em média quadrática para f (se f for contínua tende mesmo uniformemente, como dissemos.) Tende aliás pontualmᵗᵉ e

Sempre que, dado um espaço de funções $\Sigma = \{f\}$, nele existe um conjunto de funções ϕ_k tal que, dado $f \;\forall \in \Sigma$ e certos coeficientes c_k, $\sum^n c_k\phi_k$ tende em média quadrática para f

(ie: $\lim\limits_{n\to\infty} \| f - \sum^n c_k\phi_k \| = 0$),

diz-se que os ϕ_k formam um sistema completo de funções em Σ.

De notar que a aproximação em norma (ou em média quadrática) de uma função f por uma sucessão de funções ψ_n traduz (já que as funções consideradas são reais) que o erro médio quadrático é, no limite, $= 0$ pois que

$$\lim_{n\to\infty} \| f-\psi_n \| = \lim_{n\to\infty} \left(\int (f-\psi_n)^2\right) = 0$$

erro médio quadrático. (*)

Dizer portanto que os ϕ_k formam um sist. completo é dizer que, dado $\varepsilon > 0$ tão pequeno quanto se queira, é possível encontrar coeficientes c_k e um nº n tal que o erro médio quadrático (*)

$$\int \left(f - \sum^n c_k\phi_k\right)^2 < \varepsilon .$$

É claro que se os ϕ_k formam uma base infinita, como se tem (pontualᵗᵉ!), $f = \sum^\infty c_k\phi_k$ (ou seja, pontualᵗᵉ, $\lim (f - \sum^n c_k\phi_k) = 0$) é também $\| f - \sum^n c_k\phi_k \| \to 0$ e ∴ os ϕ_k formam tb um sist. completo. Mas o inverso não é necessàriamᵗᵉ verdadeiro e nem todos os sistemas completos constituem bases.

(*) é aliás a noção fundamental do ~~que toda aliás se calcula~~ método dos mínimos quadrados. Cf. Análise Harmónica - § "Erro médio quadrático e séries de Fourier".

Como se vê, não basta afirmar que um sistema de funções é completo, temos ainda de precisar para que espaço de funções ele o é: um conjunto ϕ_n, completo para um dado espaço de funções não o será necessàriamente para outro espaço com funções definidas de maneira diferente. No nosso estudo, porém, não nos preocuparemos grandemente com estes detalhes e assumiremos que um sist completo o é para um certo espaço de funções que todo seu, por ex., o das f. nas cond. de Dirichlet (as condições de regularidade a que estas obedecem chegam sobejamente para o nosso estudo).

Voltemos ao problema de Sturm-Liouville.

Designemos por u_k as soluções da equação de S.L., ~~...~~

$$(p u_k')' - q u_k + \lambda_k w u_k = 0.$$

No que se segue vamos mostrar que $\sqrt{w}\, u_k$ é um sistema completo ou seja: dado F ~~X~~ (nas condições de Dirichlet) e obedecendo às mesmas condições nos limites que $\sqrt{w}\, u_k$, é possível encontrar certos coeficientes a_k tais que

$$\lim_{n\to\infty} \left\| F - \sum^n a_k u_k \sqrt{w} \right\| = 0 \left(= \lim_{n\to\infty} \int \left(F - \sum^n a_k u_k \sqrt{w}\right)^2 \right).$$

~~...~~

Comecemos por formar uma combinação linear com um nº finito n de funções $\sqrt{w}\, u_k$ $(k = 1, 2, \dots n)$ com certos coeficientes a_k e determinemos quais devem ser estes coeficientes de modo a que deem a melhor aproximação possível de F em média quadrática isto é: de modo a que seja mínimo $\left\| F - \sum^n a_k u_k \sqrt{w} \right\|$. Temos então de tornar mínima esta expressão (ou, o que vem a dar ao mesmo, o seu quadrado) a qual é, naturalmente, função dos a_k. As condições de mínimo dão-nos então

$$\frac{\partial N}{\partial a_j} = 0 \quad j = 1, 2, \dots n \qquad \left(N \equiv \left\| F - \sum^n a_k u_k \sqrt{w} \right\|^2 = \int \left(F - \sum\right)^2 \right)$$

ou seja

$$\int 2\Big(F-\sum^{m} a_k u_k \sqrt{w}\Big)\big(-u_j\sqrt{w}\big)=0$$

$$\therefore \quad \int F u_j \sqrt{w} = \sum^{m} a_k \underbrace{\int u_k u_j w}_{\delta_{kj}}$$

δ_{kj} Consistente se os u_k são soluções da eq. de S L, os $\sqrt{w}\,u_k$ são o.n.

$$\therefore \quad \boxed{a_j = \int F u_j \sqrt{w}} \ (*)$$

São então estes os valores dos coeficientes a_j que permitem dar a melhor aproximação em média quadrática de F por ~~uma~~ meio de combinação linear de um nº finito de funções $u_k\sqrt{w}$.

Utilizando agora esta expressão dos coeficientes a_k vamos então provar que os $u_k\sqrt{w}$ formam um sist. completo, ou seja, que

$$\lim_{m\to\infty} \|c_m\| = 0 \qquad \Big(\text{c/ } c_m \equiv F-\sum^{m} a_k u_k\sqrt{w}\Big)$$

Consideremos, para isso, $\dfrac{c_m}{\|c_m\|}$. Pode ver-se que esta função é ortogonal a todos os $u_j\sqrt{w}$ com $j=1,2,\dots m$. Com efeito,

$$\int \frac{c_m}{\|c_m\|}\, u_j\sqrt{w} = \frac{1}{\|c_m\|}\int\Big(F-\sum^{m} a_k u_k\sqrt{w}\Big)u_j\sqrt{w} =$$

$$= \frac{1}{\|c_m\|}\overbrace{\int F u_j\sqrt{w}}^{=a_j} - \frac{1}{\|c_m\|}\sum_{k=1}^{m} a_k \int u_k u_j w \quad \begin{cases}(\text{se } j>m) = 0\\ (\text{se } j\leq m) = a_j\end{cases}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} = \dfrac{a_j}{\|c_m\|} \\[2ex] = \dfrac{a_j}{\|c_m\|} - \dfrac{a_j}{\|c_m\|} = 0\end{cases}$$

ou seja, $\dfrac{c_m}{\|c_m\|}$ é ortogonal a todos os $u_j\sqrt{w}$ com $j \leq m$, como se disse.

Além disto, é evidente que $\dfrac{c_m}{\|c_m\|}$ é normada $\left(\left\|\dfrac{c_m}{\|c_m\|}\right\| = \dfrac{\|c_m\|}{\|c_m\|} = 1\right)$

Temos então que $\dfrac{c_m}{\|c_m\|}$ é uma função que é normada e que é ortogonal a todos os $u_k\sqrt{w}$ $(k \leq m)$. Ora já se viu (§2. Ortonormalidade) que a função $u_{m+1}\sqrt{w}$ é normada,

---

(*) ou seja, utilizando a notação do produto interno, $a_j = (F, u_j\sqrt{w})$

ortogonal a todos os $u_k\sqrt{w}$ $(k \geq m)$ e $\frac{u_{m+1}\sqrt{w}}{\sqrt{w}} = u_{m+1}$ minimiza Δ, que toma o valor $\Delta(u_{m+1}) = \lambda_{m+1}$. A função $\frac{c_m}{\|c_m\|}$ é, sendo normada e ortogonal aos $u_k\sqrt{w}$, quando dividida por $\sqrt{w}$ e introduzida em Δ não o minimiza neste necessàriamente ou seja

$$\lambda_{m+1} = \Delta(u_{m+1}) \leq \Delta\left(\frac{c_m}{\sqrt{w}\,\|c_m\|}\right) = \left(\text{é fácil ver que } \begin{matrix}\Delta(cte.\,u) = \\ = cte^2 \cdot \Delta(u)\end{matrix}\right)$$

$$\therefore \quad \lambda_{m+1} \leq \frac{1}{\|c_m\|^2}\,\Delta(c_m/\sqrt{w})$$

Ora quando $m \to \infty$ (ver atrás), sabemos que $\lambda_m \to \infty$. Ora lodo veremos que, $\forall m$, $\Delta(c_m/\sqrt{w})$ é finito (*) $\Longrightarrow \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta(c_m/\sqrt{w})}{\|c_m\|^2} \geq \lim \lambda_{m+1} = +\infty$

$$\Longrightarrow \lim_{m\to\infty} \|c_m\| = 0 \qquad \text{cqd.}$$

(*) Para o leitor mais minuciosamente interessado nos detalhes de demonstração, mostramos no que se segue que $\Delta(c_m/\sqrt{w})$ é finito.

Para já relembremos a forma de Δ:

$$\forall z \text{ é}: \ \Delta(z) = \int(pz'^2 + qz^2) = \int pz'\cdot z' + qz^2 = \left[z\cdot pz'\right] - \int z(pz')' + \int qz^2 =$$

$$= -\int z\left((pz')' + qz\right) = \left[\text{def. pág } 2: \ L(z) \equiv (pz')' - qz\right] = -\int z L(z)$$

$\therefore$ em particular

$$\Delta(c_m/\sqrt{w}) = -\int (c_m/\sqrt{w})\, L(c_m/\sqrt{w}) = \left[\text{designando por } f = \frac{F}{\sqrt{w}}\right] =$$

$$= -\int\left(f - \sum^m a_k u_k\right) L\left(f - \sum a_j u_j\right) = -\int(\ )\Big(Lf - \sum a_j \underbrace{L(u_j)}_{L(u_j) = -\lambda_j w u_j}\Big) =$$

$$= -\int(\ )\left(Lf - \sum^m a_j \lambda_j w u_j\right) =$$

$$= -\int fLf - \sum^m a_k \lambda_k \int f u_k w + \sum^m a_j \underbrace{\int u_j Lf} + \sum_{jk}^m a_k a_j \lambda_j \underbrace{\int u_j u_k w}_{\delta_{jk}}$$

L é hermítico: $\int u_j L(f) = \int L(u_j)\cdot f = \int(-\lambda_j u_j w)\cdot f =$

$$= -\lambda_j \int F u_j \sqrt{w} = -\lambda_j a_j$$

$$= -\int fLf - \sum_k^m a_k^2 \lambda_k - \sum_j \lambda_j a_j^2 + \sum \lambda_k a_k^2$$

$$= -\int f L(f) - \sum_k^m a_k^2 \lambda_k$$

Ou seja, tornando a (*),

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_{m+1} = +\infty \leq \lim_m \left(\frac{-\int fL(f) - \sum^m a_k^2\lambda_k}{\|c_m\|^2}\right).$$

Ora $\sum^m a_k^2 \lambda_k$ é ≥ 0 $\therefore$ $\lim \Sigma = +\infty$ / $\lim \Sigma = \text{cte}$

$\longrightarrow$ VIRAR

<u>Resumindo</u>: as funções $\sqrt{w}\,u_K$ (em que u_K designam as soluções da eq. de St.-L., $(pu')' - qu + \lambda w u = 0$) formam um sist. completo: dada uma função F $\forall$, obedecendo às mesmas condições aos limites que $\sqrt{w}\,u_K$, ela pode ser aproximada em média quadrática nos $\sqrt{w}\,u_K$:

$$\lim_n \left\| F - \sum^n a_K \sqrt{w}\,u_K \right\| = 0 \qquad \left(\text{os coeficientes são } a_K = \int F u_K \sqrt{w}\right)$$

Como dissemos, isto não implica "a priori" que $F = \sum_1^\infty a_K \sqrt{w}\,u_K$ (se tenda, pontualm.te).

<u>Contudo, também é possível demonstrar-se (cf. Courant e Hilbert p. 293 e pp. 351 a 370) que tal é o caso e que se tem efectivam.te $F = \sum^\infty a_K u_K \sqrt{w}$, em que a série é pontualm.te, absolutamente e até uniformemente convergente</u> (nos intervalos onde F é contínua, claro...)

<u>Notas</u>: 1) Acabámos de mostrar que as funções $\sqrt{w}\,u_K$ são o.n. e completas. No caso particular em que a eq. de S.-L. ($(pu')' + (\lambda w - q)u = 0$) toma a forma $u'' + K^2 u = 0$ ($p = 1$, $w = 1$, $q = 0$, $\lambda = K^2$), é então $u_K = \frac{e^{iKx}}{\sqrt{2\pi}}$. (ou, equivalent.te, $\frac{\cos Kx}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\sin Kx}{\sqrt{2\pi}}$)
Reencontramos assim, partindo de um ponto de vista + geral, resultados já conhecidos da Análise Harmónica ( ).

2) No nosso estudo considerámos apenas a existência de um <u>espectro discreto</u> ou seja, de um conjunto discreto de valores próprios $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n, \dots$ e afastámos deliberadamente a possibilidade de existência de um <u>espectro contínuo</u> λ_α. Este facto pode acontecer se o intervalo de existência de x for infinito ( ). Também aqui evitámos a consideração de pontos singulares, ou seja, pontos em que os coeficientes p, q, etc podem assumir valores ∞s. Contentamo-nos em afirmar, sem entrar em pormenores, que mesmo nestes casos as conclusões a que chegámos com (a, b) finito e abstraindo de singularidades ou permanecem válidas ou são fàcilm.te generalizáveis.

$\boxed{\text{§4. Funções especiais. Introdução}}$

Comecemos por escrever a equação de Sturm-Liouville,

$$\boxed{py'' + p'y' - qy + \lambda w y = 0} \qquad (w \geqq 0),$$

na forma

$$\boxed{y'' + X_1 y' + X_2 y = 0} \qquad \left(X_1 = p'/p\,,\ X_2 = \frac{\lambda w - q}{p} \right),$$

a qual se obtém por divisão por p (e admitindo que $p \neq 0$).

Antes de apresentarmos um processo utilizado para integrar equações diferenciais deste tipo e de ~~…~~ estudar a sua validade, vamos realizar nesta equação uma transformação simples da variável dependente y que nos vai conduzir a uma equação equivalente cuja solução tem uma forma mais ou menos bem conhecida. Façamos então:

$$y = y(x) \longrightarrow v = v(x) : y = v\, e^{-\frac{1}{2}\int X_1}$$

$$\therefore\ y' = v' e^{-\frac{1}{2}\int X_1} + v\left(-\tfrac{1}{2} X_1 e^{-\frac{1}{2}\int X_1}\right)$$

$$y'' = v'' e^{-\frac{1}{2}\int X_1} - v' X_1 e^{-\frac{1}{2}\int X_1} + v\, e^{-\frac{1}{2}\int X_1}\left(\tfrac{1}{4} X_1^2 - \tfrac{1}{2} X_1'\right).$$

Substituindo na equação de S.-L., vem

$$v'' - \cancel{v' X_1} + v\left(\tfrac{1}{4}X_1^2 - \tfrac{1}{2}X_1'\right) + \cancel{X_1 v'} - \tfrac{1}{2}X_1^2 v + X_2 v = 0$$

$$\therefore\ v'' + v\left(\tfrac{1}{4}X_1^2 - \tfrac{1}{2}X_1' - \tfrac{1}{2}X_1^2 + X_2\right) = 0$$

$$\therefore\ \boxed{v'' = f(x)\, v} \qquad \text{com } f(x) = -X_2 + \tfrac{1}{2}X_1' + \tfrac{1}{4}X_1'^2 .$$

Sob esta forma, alguma coisa se pode dizer sobre o aspecto gráfico de $v(x)$, (*) sobretudo se atendermos ao facto de que esta equação estabelece uma relação entre a função v e a sua curvatura (ou, o que vem a dar no mesmo, a sua segunda derivada). Assim, e excluindo do nosso estudo os pontos onde $v(x) = \infty$, temos que v tem os seus pontos de inflexão ($v'' = 0$) onde $f = 0$ ou $v = 0$. →

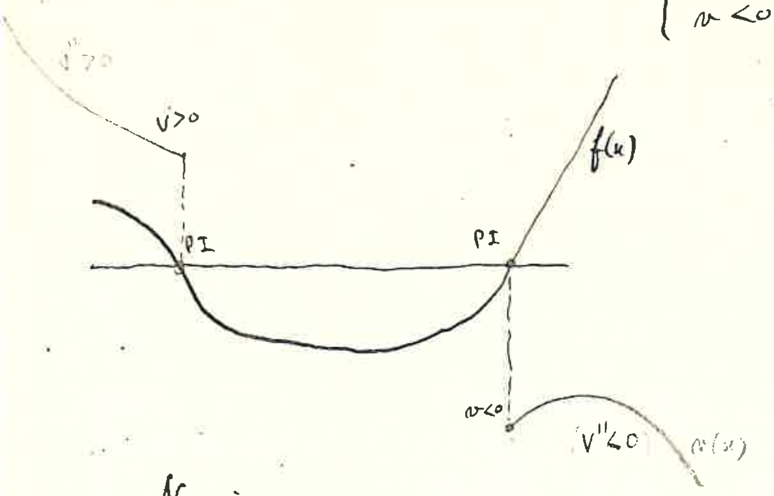
(*) No caso de $f(x) = -\omega^2$ (ω real) a solução é $v = c_1 \operatorname{sen}(\omega x + c_2)$ ∴ oscila em toda a recta. Se for $f(x) = +\omega^2$ temos $v = c_1 e^{\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$ ∴ tem comportamento exponencial e o seu módulo aumenta indefinidamente para $x \to \pm\infty$.

Consideremos por exemplo a região onde

$\boxed{f>0}$ $\quad v''=fv \Rightarrow \begin{cases} v>0 \Rightarrow v''>0 \therefore \text{concavidade p/ cima} \therefore v\to+\infty,\ x\to\pm\infty \\ v<0 \Rightarrow v''<0 \therefore \text{" "} \ \text{" baixo"} \therefore v\to-\infty,\ x\to\pm\infty \end{cases}$

no exemplo da figura:

P.I. designa um ponto de estacionaridade



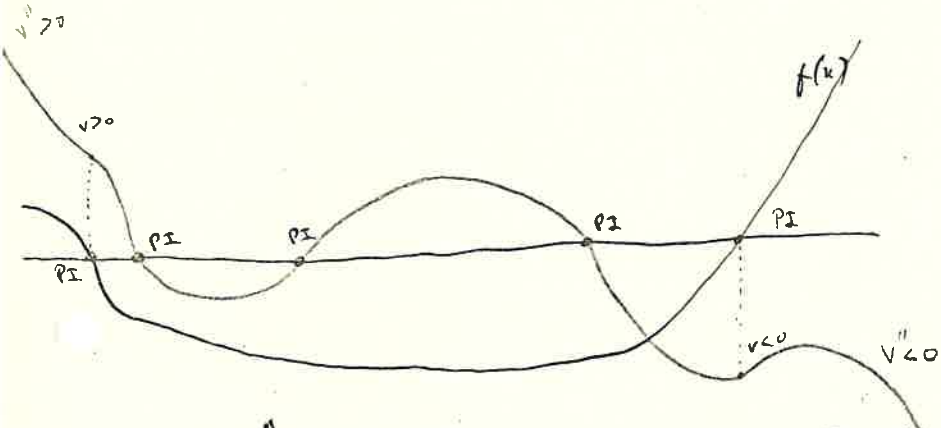
Na região onde

$\boxed{f<0}$ temos entre: $v''=fv$ $\begin{cases} v>0 \Rightarrow v''<0 \\ v<0 \Rightarrow v''>0 \end{cases}$

a função v tem valores positivos mas a sua concavidade é para baixo ∴ tende a diminuir o seu valor e chegará a zero onde, como se disse, tem um ponto de inflexão. A v agora toma valores negativos mas com a concavidade dirigida para cima, tenderá novamente para zero, novo ponto de inflexão e assim sucessivamente.

Resumindo: tem comportamento oscilatório.

ver figura:



"Grosso modo", podemos dizer que nas regiões onde $f<0$, v tem comportamento oscilatório e onde $f>0$ tende a tomar grandes valores do seu módulo (comparar com o que foi dito na pág. anterior acerca de $f(x) = \pm\omega^2$). É este portanto o aspecto gráfico da solução da equação de Sturm Liouville $y''+X_1y'+X_2y=0$ ou melhor, desta equação a menos da transformação de variável dependente $y = v\,e^{-\frac{1}{2}\int X_1}$.

§ 5. O método de integração por séries. Equação de Legendre

Passemos agora ao método a que nos referimos em § 4. Este destina-se a integrar a equação diferencial

$$y'' + X_1 y' + X_2 y = 0$$

utilizando para isso soluções com a forma de uma série de potências de x, $y = \sum_0^\infty a_n x^n$ ou, designando por K a mais pequena potência de x,

(1) $$\boxed{y = \sum_0^\infty a_\lambda x^{K+\lambda}}$$

Deixando para mais tarde (ver à frente: Teorema de Fuchs) o estudo da validade deste método bem como da existência e forma de convergência da série, vamos começar por aplicá-lo à equação de Legendre

(2) $$\boxed{(1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0}$$

onde l designa uma constante (Trata-se evidentemente de um caso particular da eq. de St. Liouville $py'' + p'y' - qy + \lambda w y = 0$ com $p = 1-x^2$, $q = 0$, $w = 1$, $\lambda = l(l+1)$). Admitamos então que existe uma solução de (1) com a forma de uma série (2) e que a convergência desta é uniforme no seu intervalo de convergência. Podemos então derivar até sob o sinal de $\sum$ e obter:

$$y = \sum_0^\infty a_\lambda x^{K+\lambda}$$
$$y' = \sum_0^\infty a_\lambda (K+\lambda) x^{K+\lambda-1}$$
$$y'' = \sum_0^\infty a_\lambda (K+\lambda)(K+\lambda-1) x^{K+\lambda-2}$$

Introduzindo estas expressões em (2) vem:

$$(1-x^2)\sum_0^\infty a_\lambda (K+\lambda)(K+\lambda-1)x^{K+\lambda-2} - 2x\sum_0^\infty a_\lambda (K+\lambda)x^{K+\lambda-1} + l(l+1)\sum_0^\infty a_\lambda x^{K+\lambda} = 0$$

ou, agrupando os somatórios,

$$\sum_0^\infty a_\lambda (K+\lambda)(K+\lambda-1)x^{K+\lambda-2} + \sum_0^\infty \left[-(K+\lambda)(K+\lambda-1) - 2(K+\lambda) + l(l+1)\right] a_\lambda x^{K+\lambda} = 0$$

ou ainda

(*) $$a_0 k(k-1)x^{k-2} + a_1 k(k+1)x^{k-1} + \sum_0^{\infty} \left\{ a_{\lambda+2}(k+\lambda+2)(k+\lambda+1) - a_\lambda\left[(k+\lambda)(k+\lambda+1) + \cancel{\ldots} - l(l+1)\right]\right\} x^{k+\lambda} = 0 \quad (**)$$

A = dade a zero implica então que todos os coeficientes das potências de x sejam = a zero. Ou seja:

$$\boxed{\begin{array}{l} a_0 k(k-1) = 0 \\ a_1 k(k+1) = 0 \end{array} \Big\} \text{(equação indicial)} \qquad a_{\lambda+2} = a_\lambda \cdot \frac{(k+\lambda)(k+\lambda+1) - l(l+1)}{(k+\lambda+2)(k+\lambda+1)} \quad (\lambda = 0,1,2,\cdots) \text{ (fórmula de recorrência)}}$$

A chamada equação indicial permite em princípio determinar (ou impõe restrições) os valores possíveis de K e dos coeficientes a_0 e a_1 os quais, introduzidos na fórmula de recorrência, determinam todos os restantes. É evidente, pela fórmula de recorrência que, se algum $a_N = 0$ então todos os a_{N+2K} (com $K = 1,2,\cdots$) são também nulos.

Há mais de uma maneira de satisfazer à equação indicial. A solução $a_0 = a_1 = 0$, $K\ \forall$ corresponde, pelo que precede, à solução nula (todos os $a_n = 0$) e não deve ser considerada. As soluções significativas são então:

1º) $a_0 = 0$, $a_1 \neq 0\ \forall$, $k = -1$

2º) $a_0 \neq 0\ \forall$, $a_1 = 0$, $k = 1$

3º) $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0\ \forall$, $k = 0$

A solução $\left\{\begin{array}{l}1)\\2)\end{array}\right.$ faz apenas intervir uma constante arbitrária, $\left\{\begin{array}{l}a_1\\a_0\end{array}\right.$, sendo $\left\{\begin{array}{l}a_0=0\\a_1=0\end{array}\right.$. Pela fórmula de recorrência vê-se que na solução $\left\{\begin{array}{l}1)\\2)\end{array}\right.$ são nulos todos os coeficientes de índice $\left\{\begin{array}{l}\text{par}\\\text{ímpar}\end{array}\right.$.

(**) $f(x) = \sum_0^\infty A_k x^k = 0$; admitindo que a convergência é uniforme vem $f'(x) = \sum_0^\infty k A_k x^{k-1} = 0$, $f''(x) = \sum_0^\infty k(k-1) A_k x^{k-2} = 0$, etc. Como $f(x) = \cancel{\ldots}\ f'(x) = f''(x) = \ldots = 0\ \forall x$ é, em particular $f(0) = f'(0) = f''(0) = \cdots = 0$ donde $A_0 = A_1 = A_2 = \cdots = 0$ cqd.

(*) Mais detalhadamente:

$$\underbrace{a_0 k(k-1)x^{k-2}}_{(\lambda=0)} + \underbrace{a_1 k(k+1)x^{k-1}}_{(\lambda=1)} + \sum_{\lambda=2}^{\infty} a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \sum_0^\infty \left[-(k+\lambda)(k+\lambda-1+2) + l(l+1)\right] a_\lambda x^{k+\lambda} = 0$$

Fazendo no 1º somatório $\lambda = \mu + 2$ vem então $\sum_{\mu=0}^\infty a_{\mu+2}(k+\mu+2)(k+\mu+1)x^{k+\mu}$ = (trocando μ por λ) = $\sum_{\lambda=0}^\infty a_{\lambda+2}(k+\lambda+2)(k+\lambda+1) x^{k+\lambda}$

$$\therefore\ a_0 k(k-1)x^{k-2} + a_1 k(k+1)x^{k-1} + \sum_{\lambda=0}^\infty a_{\lambda+2}(k+\lambda+2)(k+\lambda+1)x^{k+\lambda} + \sum_{\lambda=0}^\infty \left[-(k+\lambda)(k+\lambda+1) + l(l+1)\right] a_\lambda x^{k+\lambda} = 0$$

donde (*)

Na solução 3) intervêm duas constantes arbitrárias, a_1 e a_0 e nela existem coeficientes não nulos, cujos índices percorrem todos os valores de n. Comecemos por estudar a solução

$$\boxed{\begin{array}{l} 1^{\circ}) \quad a_0 = 0 \\ \quad\quad a_1 \neq 0 \ \forall \\ \quad\quad k = -1 \end{array}}$$

$$y_1 = \sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda} = \sum_0^\infty a_\lambda x^{\lambda-1} = a_1 + a_3x^2 + a_5x^4 + a_7x^6 + \dots$$

$$a_{\lambda+2} = a_\lambda \frac{\lambda(\lambda-1) - l(l+1)}{\lambda(\lambda+1)} = (*) = -\frac{(l+\lambda)(l-\lambda+1)}{\lambda(\lambda+1)} a_\lambda$$

$\therefore \quad a_1 \ \forall$

$(\lambda=1) \quad a_3 = -a_1\frac{(l+1)l}{2!}$

$(\lambda=3) \quad a_5 = -a_3 \frac{(l+3)(l-2)}{4\cdot 3} = a_1\frac{(l+3)(l+1)l(l-2)}{4!}$

$(\lambda=5) \quad a_7 = -a_5\frac{(l+5)(l-4)}{6\cdot 5} = -a_1 \frac{(l+5)(l+3)(l+1)l(l-2)(l-4)}{6!}$

etc...

$\therefore$

$$\boxed{\begin{array}{l} y_1 = a_1\Big[\overset{\lambda=0}{1} - \overset{\lambda=1}{\frac{(l+1)l}{2!}x^2} + \overset{\lambda=2}{\frac{(l+3)(l+1)l(l-2)}{4!}x^4} - \overset{\lambda=3}{\frac{(l+5)(l+3)(l+1)l(l-2)(l-4)}{6!}x^6} + \dots \\ \qquad\qquad + \overset{(\lambda)}{(-1)^\lambda \frac{(l+2\lambda-1)\cdots(l+1)\,l\,(l-2)\cdots(l-2\lambda+2)}{(2\lambda)!}x^{2\lambda}} + \dots\Big] \\ |x|<1 \end{array}}$$

(Adiante veremos que esta série é convergente para $|x|<1$).

Esta solução da equação de Legendre (2) faz intervir apenas uma única constante arbitrária, a_1. Trata-se portanto de uma solução particular de (2). (A solução geral tem de fazer intervir 2 constantes arbitrárias — a eq. (2) é de 2ª ordem.)

Notar que, no caso particular da constante l que intervém em (2) ser um número inteiro, negativo ímpar ou positivo par, a série de y_1 reduz-se a um polinómio. (exercício; determinar a forma desses polinómios)

Passemos à solução 2) →

$$\lambda(\lambda-1) - l(l+1) = 0 \iff -l^2 - l + \lambda^2 - \lambda = 0 \implies l = \frac{1\pm\sqrt{1+4\lambda^2-4\lambda}}{-2} = \frac{1\pm\sqrt{(2\lambda-1)^2}}{-2} = \begin{cases} -\lambda \\ \lambda-1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad \lambda(\lambda-1) - l(l+1) = -(l+\lambda)(l-\lambda+1)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2^{\circ})\ a_0 \neq 0\ \forall \\ a_1 = 0 \\ k = 1 \end{array}}$$

$$y_2 = \sum_0^\infty a_\lambda x^{p+\lambda} = \sum_0^\infty a_\lambda x^{\lambda+1} = a_0 x + a_2 x^3 + a_4 x^5 + a_6 x^7 + \dots$$

$$a_{\lambda+2} = a_\lambda \frac{(\lambda+1)(\lambda+2) - l(l+1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)} \overset{(*)}{=} -a_\lambda \frac{(l+\lambda+2)(l-\lambda-1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)}$$

$\therefore\ a_0\ \forall$

$$(\lambda=0)\quad a_2 = -a_0 \frac{(l+2)(l-1)}{3!}$$

$$(\lambda=2)\quad a_4 = -a_2 \frac{(l+4)(l-3)}{5\cdot 4} = +a_0 \frac{(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)}{5!}$$

$$(\lambda=4)\quad a_6 = -a_4 \frac{(l+6)(l-5)}{7\cdot 6} = -a_0 \frac{(l+6)(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)(l-5)}{7!}$$

etc...

$$\boxed{\therefore\ y_2 = a_0\Big[\underset{\lambda=0}{x} - \underset{\lambda=1}{\frac{(l+2)(l-1)}{3!}x^3} + \underset{\lambda=2}{\frac{(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)}{5!}x^5} - \underset{\lambda=3}{\frac{(l+6)(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)(l-5)}{7!}x^7} + \dots + \underset{(\lambda)}{(-1)^\lambda \frac{(l+2\lambda)\dots(l+2)(l-1)\dots(l-2\lambda+1)}{(2\lambda+1)!}x^{2\lambda+1}} + \dots\Big]}$$

$|x| < 1$
(vai à frente)

y_2 faz intervir apenas uma constante arbitrária ∴ é tb uma solução particular de (2) (e é independente de y_1 — pois que não são proporcionais!). Sendo assim,

~~[illegible]~~

a solução geral de (2) é uma combinação linear de y_1 e y_2. Ora a soluç (3) faz intervir 2 constantes arbitrárias, como dissemos. ∴ é de esperar que seja a soluç geral e ∴ uma combinação linear de y_1 e y_2. É o que sucede, com efeito, como se vai ver adiante.

De notar que, no caso de l ser um número inteiro <u>negativo par ou positivo ímpar</u> a série de y_2 se reduz a um polinómio.

(exercício: determinar a forma deste polinómio)

$$(\lambda+1)(\lambda+2) - l(l+1) = -l^2 - l + (\lambda^2+3\lambda+2) = 0 \Rightarrow l = \frac{1\pm\sqrt{1+4\lambda^2+12\lambda+8}}{-2} = \frac{1\pm\sqrt{(2\lambda+3)^2}}{-2} = \begin{cases} = -\lambda-2 \\ = \lambda+1 \end{cases}$$

$$\therefore\ (\lambda+1)(\lambda+2) - l(l+1) = -(l-\lambda-1)(l+\lambda+2).$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 3^{\circ}) \quad a_0 \neq 0 \ \forall \\ \qquad a_1 \neq 0 \ \forall \\ \qquad k = 0 \end{array}}$$

$$y = \sum_0^{\infty} a_\lambda x^{k+\lambda} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots\ldots$$

$$a_{\lambda+2} = a_\lambda \frac{\lambda(\lambda+1) - l(l+1)}{(\lambda+2)(\lambda+1)} = (*) = -a_\lambda \frac{(l-\lambda)(l+\lambda+1)}{(\lambda+2)(\lambda+1)}$$

$\therefore \ a_0 \forall$

$$(\lambda = 0) \quad a_2 = -a_0 \frac{(l+1)l}{2!}$$

$$(\lambda = 2) \quad a_4 = -a_2 \frac{(l+3)(l-2)}{4 \cdot 3} = +a_0 \frac{(l+3)(l+1)l(l-2)}{4!}$$

$$(\lambda = 4) \quad a_6 = -a_4 \frac{(l+5)(l-4)}{6 \cdot 5} = -a_0 \frac{(l+5)(l+3)(l+1)l(l-2)(l-4)}{6!}$$

etc.

$a_1 \forall$

$\therefore$

$$(\lambda = 1) \quad a_3 = -a_1 \frac{(l+2)(l-1)}{3!}$$

$$(\lambda = 3) \quad a_5 = -a_3 \frac{(l+4)(l-3)}{5 \cdot 4} = +a_1 \frac{(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)}{5!}$$

$$(\lambda = 5) \quad a_7 = -a_5 \frac{(l+6)(l-5)}{7 \cdot 6} = -a_1 \frac{(l+6)(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)(l-5)}{7!}$$

etc.

$$\therefore \ y = a_0 \left[1 - \frac{(l+1)l}{2!} x^2 + \frac{(l+3)(l+1)l(l-2)}{4!} x^4 - \frac{(l+5)(l+3)(l+1)l(l-2)(l-4)}{6!} x^6 + \ldots \right] +$$

$$+ a_1 \left[x - \frac{(l+2)(l-1)}{3!} x^3 + \frac{(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)}{5!} x^5 - \frac{(l+6)(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)(l-5)}{7!} x^7 + \ldots \right]$$

a_0 e a_1 são constantes arbitrárias $\forall$. $\therefore$ y é a solução geral de (2) e, como se vê, é a combinação linear de y_1 e y_2:

$$\boxed{\therefore \ y = c_1 y_1 + c_2 y_2}$$

$$(*) \quad \lambda(\lambda+1) - l(l+1) = -l^2 - l + \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4\lambda^2 + 4\lambda}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{(2\lambda+1)^2}}{-2} = \begin{cases} = -\lambda - 1 \\ = \lambda \end{cases}$$

$$\therefore \ \lambda(\lambda+1) - l(l+1) = -(l-\lambda)(l+\lambda+1)$$

As soluções anteriores foram obtidas admitindo a priori a existência de soluções da forma (1). Temos agora de verificar se as séries obtidas existem realmente, isto é, se são ou não convergentes. Sabe-se (critério de Cauchy) que uma série $\sum^{\infty} u_m(x)$ é convergente se o $\lim_{m\to\infty}$ do quociente dos módulos de dois termos consecutivos for <1 e divergente se $\geqq 1$. Começando pela solução particular y_1 temos

$$\begin{cases} y_1 = a_1 + a_3 x^2 + a_5 x^4 + \cdots \\ a_{\lambda+2} = \dfrac{\lambda(\lambda-1) - l(l+1)}{\lambda(\lambda+1)}\, a_\lambda \end{cases}$$ $\therefore$ seu quociente é da forma

$$\left|\frac{a_{\lambda+2}}{a_\lambda}\right| x^2 = \left|\frac{\lambda(\lambda-1) - l(l+1)}{\lambda(\lambda+1)}\right| x^2 = \left|\frac{\lambda^2 - \lambda - l(l+1)}{\lambda^2+\lambda}\right| x^2 = \left|\frac{1 - \frac{1}{\lambda} - \frac{l(l+1)}{\lambda^2}}{1+\frac{1}{\lambda}}\right| x^2$$

e $\lim_{\lambda\to\infty} = x^2$ $\therefore$ y_1 é convergente se $|x|<1$

O mesmo se pode ver para $y_2 = a_0 x + a_2 x^3 + a_4 x^5 + \cdots$ com

$$a_{\lambda+2} = -a_\lambda \frac{(\lambda+1)(\lambda+2) - l(l+1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)}$$

O quociente dos módulos de dois termos consecutivos é

$$\left|\frac{a_{\lambda+2}}{a_\lambda}\right| x^2 = \left|\frac{(\lambda+1)(\lambda+2) - l(l+1)}{(\lambda+2)(\lambda+3)}\right| x^2 = \left|\frac{\lambda^2 + \cdots}{\lambda^2 + \cdots}\right| x^2$$ e é evidente que

$\lim_{\lambda\to\infty} = x^2$ $\therefore$ y_2 é convergente se $|x|<1$.

O mesmo acontece por consequinte com a solução geral $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$.

Ora, como se sabe, (Knopp. 332-333), toda série de potências $\left(\sum^{\infty} c_k x^k\right)$ é uniformemente convergente em todo subintervalo do seu intervalo de convergência. Em consequência as séries y_1, y_2 e $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ são uniformemente convergentes em qualquer intervalo contido em $(-1,1)$.

As soluções anteriores foram obtidas como séries de potências crescentes de x e o seu intervalo de convergência é ~~[illegible]~~ $|x|<1$. Vamos procurar agora soluções com a forma de séries de potências decrescentes de x (Veremos que o intervalo de convergência é agora $|x|>1$). O processo é o mesmo.

(deixar tudo como exercício, indicando os tópicos?)

Suponhamos então que a equação de Legendre (2) admite soluções da forma

$$(3)\qquad \boxed{y = \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda\, x^{k-\lambda}}$$

onde K designa o expoente mais elevado de x. Admitindo "a priori", como no estudo anterior, ~~...~~ a convergência uniforme de (3) temos, derivando sob o sinal de $\sum^{\infty}$,

$$y' = \sum_0^{\infty} b_\lambda (k-\lambda)\, x^{k-\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_0^{\infty} b_\lambda (k-\lambda)(k-\lambda-1)\, x^{k-\lambda-2}.$$

Substituindo ~~...~~ na equação de Legendre,

$$(2)\qquad (1-x^2)y'' - 2xy' + l(l+1)y = 0, \quad \text{vem}$$

$$(1-x^2)\sum_0^{\infty} b_\lambda (k-\lambda)(k-\lambda-1)\, x^{k-\lambda-2} - 2x\sum_0^{\infty} b_\lambda (k-\lambda)x^{k-\lambda-1} + l(l+1)\sum_0^{\infty} b_\lambda x^{k-\lambda} = 0$$

ou seja ~~...~~

$$\sum_0^{\infty} b_\lambda (k-\lambda)(k-\lambda-1)x^{k-\lambda-2} + \sum_0^{\infty} b_\lambda \{\overbrace{-(k-\lambda)(k-\lambda-1) - 2(k-\lambda)}^{-(k-\lambda)(k-\lambda+1)} + l(l+1)\}\, x^{k-\lambda} = 0$$

donde (*)

$$b_0[-k(k+1)+l(l+1)]x^k + b_1[-k(k-1)+l(l+1)]x^{k-1} + \sum_{\lambda=0}^{\infty}\{b_\lambda (k-\lambda)(k-\lambda-1) - b_{\lambda+2}\cdot$$

$$\cdot[(k-\lambda-1)(k-\lambda-2) - l(l+1)]\}\, x^{k-\lambda-2} = 0$$

Os coeficientes de cada potência de x têm então de ser $= 0$, o que conduz às equações seguintes: →

$$(*)\quad \sum_0^{\infty} b_\lambda (k-\lambda)(k-\lambda-1)x^{k-\lambda-2} + b_0\{-k(k+1)+l(l+1)\}x^k + b_1\{-k(k-1)+l(l+1)\}x^{k-1} +$$

$$+ \sum_{\lambda=2}^{\infty} b_\lambda \{-(k-\lambda)(k-\lambda+1) + l(l+1)\}\, x^{k-\lambda} = 0$$

e pondo $\lambda = \mu+2$ no último $\sum$ vem este $\sum_{\mu=0}^{\infty} b_{\mu+2}\{-(k-\mu-2)(k-\mu-1) + l(l+1)\}\, x^{k-\mu-2}$ ou pondo $\lambda \sim \mu$,

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} b_{\lambda+2}\{-(k-\lambda-2)(k-\lambda-1) + l(l+1)\}\, x^{k-\lambda-2}.$$

Donde se tira (*)

$$\left.\begin{array}{l} b_0\left[-k(k+1)+l(l+1)\right]=0 \\ b_1\left[-k(k-1)+l(l+1)\right]=0 \end{array}\right\} \text{ equação indicial } \underset{(**)}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} b_0(k-l)(k+l+1)=0 \\ b_1(k+l)(k-l-1)=0 \end{array}\right.$$

$$b_{\lambda+2} = b_\lambda \frac{(k-\lambda)(k-\lambda-1)}{(k-\lambda-1)(k-\lambda-2)-l(l+1)} \underset{(*)}{=} b_\lambda \frac{(k-\lambda)(k-\lambda-1)}{(k-\lambda-l-2)(k-\lambda+l-1)}$$

(fórmula de recorrência)

A equação indicial dá-nos quatro tipos de solução que vamos estudar:
(deixar como exercício?)

1º) $b_0 \forall \neq 0$, $b_1 = 0$, $k = l$

2º) $b_0 \forall \neq 0$, $b_1 = 0$, $k = -l-1$

3º) $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0 \forall$, $k = -l$

4º) $b_0 = 0$, $b_1 \neq 0 \forall$, $k = l+1$

$$\boxed{\begin{array}{l} 1º)\ b_0 \forall \neq 0 \\ b_1 = 0 \\ k = l \end{array}}$$

$$y = x^k \sum_{\lambda=0}^{\infty} b_\lambda x^{-\lambda} = x^l \left(b_0 + b_2 x^{-2} + b_4 x^{-4} + \cdots\right)$$

$$b_{\lambda+2} = -\frac{(l-\lambda)(l-\lambda-1)}{(\lambda+2)(2l-\lambda-1)} b_\lambda$$

$b_0 \forall \neq 0$

$(\lambda=0)$ $$b_2 = -\frac{l(l-1)}{2(2l-1)} b_0$$

$(\lambda=2)$ $$b_4 = -\frac{(l-2)(l-3)}{4\cdot(2l-3)} b_2 = +\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{4\cdot 2\cdot(2l-1)(2l-3)} b_0$$

$(\lambda=4)$ $$b_6 = -\frac{(l-4)(l-5)}{6\cdot 2l-5} b_4 = -\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)(l-4)(l-5)}{6\cdot 4\cdot 2\cdot(2l-1)(2l-3)(2l-5)} b_0$$

etc.

$(**)$ $$k(k\pm 1) - l(l+1) = 0 \Longleftrightarrow k^2 \pm k - l(l+1) = 0 \rightarrow k = \frac{\mp 1 \pm \sqrt{1+4l^2+4l}}{2} = \begin{cases} \dfrac{\pm 1 + 2l + 1}{2} = l+1 \ / \ l \\[2mm] \dfrac{\pm 1 - 2l - 1}{2} = -l-1 \ / \ -l \end{cases}$$

$$\therefore\ (k \mp l)(k \pm l + 1) = 0$$

$(*)$ $$(k-\lambda-1)(k-\lambda-2) - l(l+1) = 0 \Longleftrightarrow k^2 - k(2\lambda+3) + (\lambda+2)(\lambda+1) - l(l+1) = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{(2\lambda+3) \pm \sqrt{(4\lambda^2+12\lambda+9) + 4l^2 + 4l - 4(\lambda^2+3\lambda+2)}}{2} = \frac{(2\lambda+3) \pm \sqrt{(2l+1)^2}}{2} \begin{cases} = \lambda+l+2 \\ = \lambda-l+1 \end{cases}$$

$$\therefore (k-\lambda-1)(k-\lambda-2) - l(l+1) = +(k-\lambda-l-2)(k-\lambda+l-1).$$

$$y_3 = x^l b_0 \left[1 - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)} x^{-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{4\cdot 2\cdot(2l-1)(2l-3)} x^{-4} + \cdots \right.$$

$|x|>1$

$$\left. \cdots + (-1)^\lambda \frac{l(l-1)(l-3)\cdots(l-2\lambda+1)}{2\lambda\cdots 2\cdot(2l-1)\cdots(2l-2\lambda+1)} x^{-2\lambda} + \cdots \right]$$

É fácil verificar pelo critério de Cauchy que esta série converge em $|x|>1$.
Também é manifesto que quando l fôr um nº inteiro positivo $\forall$, esta série se reduz a um polinómio. (... ? exercício)

2º) $b_0 \forall \neq 0$, $b_1 = 0$, $k = -l-1$

$$y = x^k \sum_0^\infty b_\lambda x^\lambda = x^{-l-1}(b_0 + b_2 x^{-2} + b_4 x^{-4} + \cdots)$$

$$b_{\lambda+2} = b_\lambda \frac{(l+1+\lambda)(l+2+\lambda)}{(2l+3+\lambda)(2+\lambda)}$$

$\therefore$ $b_0 \forall \neq 0$

$(\lambda=0)$ $b_2 = \dfrac{(l+1)(l+2)}{2\cdot(2l+3)} b_0$

$(\lambda=2)$ $b_4 = \dfrac{(l+3)(l+4)b_2}{4\cdot(2l+5)} = \dfrac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{4\cdot 2\cdot(2l+5)(2l+3)} b_0$

etc.

$\therefore$

$$y_4 = x^{-l-1} b_0 \left[1 + \frac{(l+1)(l+2)}{2(2l+3)} x^{-2} + \frac{(l+1)(l+2)(l+3)(l+4)}{4\cdot 2\cdot(2l+3)(2l+5)} x^{-4} + \cdots \right.$$

$|x|>1$

$$\left. + \frac{(l+1)(l+2)\cdots(l+2\lambda)}{(2\lambda)\cdots 2\,(2l+3)\cdots(2l+2\lambda+1)} x^{-2\lambda} + \cdots \right]$$

Esta série converge para $|x|>1$ e reduz-se a um polinómio quando l fôr um nº inteiro negativo.

Cada uma das soluções y_3 e y_4 depende de uma constante arbitrária. Como, além disto, são independentes, segue-se que a sua combinação linear dá uma solução geral de (2) — convergente em $|x|>1$.

Pode verificar-se fàcilmente que ~~...~~ a 3ª) e 4ª) soluções indicadas na pág. 31. se reduzem, respectivamente, a y_4 e y_3.

§6. Polinómios de Legendre

Como já fizemos notar, as séries y_1, y_2, y_3 e y_4, soluções da equação de Legendre, reduzem-se a polinómios quando l toma certos valores inteiros.

Assim — e tal como será visto em exercícios práticos — é fácil mostrar que se l fôr um nº inteiro positivo (par ou impar), y_1 e y_2 reduzem-se a y_3 (enquanto y_4 permanece uma série; a solução geral da equação de Legendre é, para estes valores de l, a combinação linear de um polinómio e de uma série). Analogamente, pode ver-se que se l for um nº inteiro negativo (pondo de t) y_1 e y_2 reduzem-se a y_4, tomando a forma de um polinómio (y_3 permanece uma série; a soma desta série e do polinómio é então a solução geral para este caso).

Em consequência, temos que para valores inteiros de l, as soluções polinomiais da equação de Legendre são então y_3 $(l>0)$ e y_4 $(l<0)$. Mas como, no fundo, y_3 e y_4 são estruturalmente idênticos (um exercício fácil mostrar que a série y_4 se pode obter de y_3 substituindo l por $-(l+1)$), basta-nos apenas considerar os polinómios que se obtêm de y_3 quando $l>0$, inteiro.

Estes são os chamados <u>Polinómios de Legendre</u>:

$$y_3 = b_0\left[x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{4\cdot 2\cdot(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} - \cdots\cdots \quad .\right]$$

O último termo dentro do parêntesis é uma constante. O polinómio é, evidentemente, de ordem l (o expoente mais elevado de x)

O coeficiente b_0 arbitrário é geralmente escolhido(*) $b_0 = \frac{(2l-1)(2l-3)\cdots 1}{l!} \equiv \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$

Temos então:

$$\boxed{P_l(x) \equiv \frac{(2l-1)(2l-3)\cdots 1}{l!}\left[x^l - \frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + \frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{4\cdot 2\cdot(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} - \cdots\cdots \quad .\right]}$$

Polinómios de Legendre de ordem l

(*) Prova-se que com b_0 assim fixado, temos que no ponto $x=1$ o polinómio toma o valor 1.

§7. Teorema de Fuchs

Como vimos, o método de integração por séries foi utilizado com êxito para resolver a equação de Legendre,

$$y'' + X_1 y' + X_2 y = 0 \qquad \left(\text{com } X_1 = \frac{-2x}{(1-x^2)}\ ,\ X_2 = \frac{l(l+1)}{(1-x^2)}\right),$$

conduzindo a soluções significativas dadas pelas séries convergentes $y_1 y_2 y_3$ e y_4. Contudo, nem todas as equações da forma $y'' + X_1 y' + X_2 y = 0$ são susceptíveis de integração por este processo, tal como se pode verificar com os exemplos seguintes:

a) $y'' + y/x^3 = 0$

b) $y'' + y'/x^2 = 0$

É natural supôr que a razão deste facto resida na existência de pontos singulares de X_1 e X_2 (i.e.: pontos x_0 tais que $X_1(x_0)$ ou $X_2(x_0) = \infty$). De uma maneira um pouco grosseira pode dizer-se que, como os desenvolvimentos em série de X_1 e X_2 na vizinhança do ponto x_0 não são convergentes, a série final que se obtém depois da substituição de $y = \sum a_\lambda (x-x_0)^{k+\lambda}$ e das suas derivadas, pode não ser convergente e daí não podermos igualar a zero cada um dos coeficientes.(**) Mas isto não quer dizer que o método não resulte sempre que haja pontos singulares. Assim, a equação

a) e b) têm pontos singulares em $x_0 = 0$.

c) $y'' + y'/x - y/x^2 = 0$

tem ponto singular em $x = 0$ e contudo o método de integração por séries conduz a uma solução geral significativa como se pode verificar sem dificuldade (*).

(*) O leitor é aconselhado a fazer o estudo das equações a) b) e c) e verificar estas afirmações. Deve notar-se que a eq. de Legendre tem pontos singulares em $x = \pm 1$ o que está ligado ao facto de a solução geral não existir nesses pontos (apenas em $|x| > 1$ e $|x| < 1$). Mas não tem pontos singulares em $x = 0$ e isso deve associar-se ao facto de ter sido possível o desenvolvimento em série da sua solução em potências de $(x-0)$.

(**) Para mais detalhes, cf. Arfken 1.306–310.

Estes exemplos mostram-nos que nem todas as singularidades impedem a utilização do método de integração por séries e que haverá que distinguir entre os pontos singulares. Essa distinção e a validade da aplicação do método são precisadas pelo Teorema de Fuchs: (cf Bajot p. 306–310)

Se a equação diferencial $y''+X_1y'+X_2y=0$ ($X_1(x), X_2(x)$) tem singularidades em $x=x_0$, é possível determinar um desenvolvimento em série para y, convergente em $x=x_0$ e tendo apenas um nº finito de termos com expoente negativo, desde que as expressões

$$(x-x_0)X_1 \qquad e \qquad (x-x_0)^2X_2$$

sejam finitas em $x=x_0$ (omitimos a demonstração)

Este teorema permite assim distinguir entre as singularidades essenciais, para as quais $(x-x_0)X_1$ e $(x-x_0)^2X_2$ permanecem ∞s em $x=x_0$ e que impedem portanto a aplicação do método de integração por séries, e as singularidades não-essenciais que são, "grosso modo", removíveis por multiplicação por $(x-x_0)$ e $(x-x_0)^2$ e que permitem a aplicação do método.

Como se verifica, o ponto $x_0=0$ é singularidade essencial para as equações (a) e (b) e não-essencial para a equação (c), confirmando os resultados atrás enunciados.

Com base no Teor. de Fuchs podemos utilizar o método de integração por séries na solução de muitas eq. dif. Assim, e considerando apenas eq. dif lineares (da forma $y''+X_1y'+X_2y=0$) c/ X_1 e X_2 funções algébricas de x, é possível integrar as equações:

hipergeométrica: $x(x-1)y''+[(1+\alpha+\beta)x-\gamma]y'+\alpha\beta y=0$
(α,β,γ const.; γ não inteiro. singularidades não essenciais em 0,1)

de Bessel: $x^2y''+xy'+(x^2-m^2)y=0$
(m const. sing. não essencial em 0)

de Laguerre: $xy''+(1-x)y'+\alpha y=0$
(α const. sing. não essencial em 0)

etc.

EXERCÍCIOS PRÁTICOS

(~~[illegible]~~ Sugere-se que o leitor aplique o método de int. por séries a estas equações)

§ 8. Equação de Mathieu

No que precede fez-se a aplicação do método de integração por séries à equação diferencial $y''+X_1y'+X_2y=0$ em que X_1 e X_2 são funções algébricas de x. Neste § , vamos fazer uma aplicação do mesmo método a uma equação em que os coeficientes são periódicos. Uma das equações mais simples deste tipo é a chamada eq. de Mathieu:

$$y''+(a+16b\cos 2x)y=0.$$

Por meio da transformação de variável independente

$$x \longrightarrow t=\cos^2 x$$

dá tomam a forma

$$(4t-4t^2)\ddot{y}+(2-4t)\dot{y}+(a-16b+32bt)y=0 \qquad (*)$$

(os pontos designam derivação em ordem a t, as plicas em ordem a x).

A introdução, nesta equação, de $y=\sum_0^\infty a_\lambda t^{k+\lambda}$, $y'=\sum_0^\infty a_\lambda(k+\lambda)t^{k+\lambda-1}$, $y''=\sum_0^\infty a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)t^{k+\lambda-2}$, conduz a

$$4\sum_0 a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)t^{k+\lambda-1}-4\sum_0 a_\lambda(k+\lambda)(k+\lambda-1)t^{k+\lambda}+2\sum_0 a_\lambda(k+\lambda)t^{k+\lambda-1}-4\sum_0 a_\lambda(k+\lambda)t^{k+\lambda}+(a-16b)\sum_0 a_\lambda t^{k+\lambda}+$$

$$+32b\sum_0 a_\lambda t^{k+\lambda+1}=0$$

ou seja,

$$\sum_0 a_\lambda\underbrace{\left[2(k+\lambda)+4(k+\lambda)(k+\lambda-1)\right]}_{2(k+\lambda)(1+2k+2\lambda-2)}t^{k+\lambda-1}+\sum_0 a_\lambda\Big[(a-16b)\underbrace{-4(k+\lambda)-4(k+\lambda)(k+\lambda-1)}_{-4(k+\lambda)^2}\Big]t^{k+\lambda}+32b\sum a_\lambda t^{k+\lambda+1}=0$$

(*) $x\longrightarrow t=\cos^2 x \quad \therefore \quad \frac{dt}{dx}=-2\cos x\sin x,\ \frac{d^2t}{dx^2}=2\sin^2 x-2\cos^2 x \quad \therefore$

$$\frac{d}{dx}=\frac{d}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=-2\cos x\sin x\frac{d}{dt}\ ;\qquad \frac{d^2}{dx^2}=(-2\cos x\sin x)'\frac{d}{dt}-2\cos x\sin x\frac{d^2}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}=$$

$$=(2\sin^2 x-2\cos^2 x)\frac{d}{dt}+(4\cos^2 x\sin^2 x)\frac{d^2}{dt^2}\quad \text{e como}\ \begin{cases}\cos 2x=2\cos^2 x-1=2t-1\\ \sin^2 x=1-\cos^2 x=1-t\end{cases}\Rightarrow$$

$$=2(1-t-t)\frac{d}{dt}+4t(1-t)\frac{d^2}{dt^2}=(4t-4t^2)\frac{d^2}{dt^2}+(2-4t)\frac{d}{dt}.\quad \text{Donde } (*)$$

$$2a_0 k(2k-1)t^{k-1} + 2a_1(k+1)(2k+1)\,t^{k} + 2\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{\lambda+2}(k+\lambda+2)(2k+2\lambda+3)\,t^{k+\lambda+1} -$$

$$-(4k^2-a+16b)a_0 t^{k} - \sum_{\lambda=0}^{\infty}\left[4(k+\lambda+1)^2-a+16b\right]a_{\lambda+1}t^{k+\lambda+1} +$$

$$+32b\sum_{0} a_\lambda t^{k+\lambda+1} = 0$$

ou seja

$$2a_0 k(2k-1)t^{k-1} + \left[2a_1(k+1)(2k+1) - (4k^2-a+16b)a_0\right]t^{k} +$$

$$+\sum_{0}^{\infty}\left\{2a_{\lambda+2}(k+\lambda+2)(2k+2\lambda+3) - \left[4(k+\lambda+1)^2-a+16b\right]a_{\lambda+1} + 32b\,a_\lambda\right\}t^{k+\lambda+1} = 0$$

Os dois primeiros coeficientes, igualados a zero, dão-nos as equações indiciais, e o coeficiente do termo geral da série, igualado a zero, dá-nos a fórmula de recorrência que se exprime agora em função de 3 termos: $a_{\lambda+2} = f(a_{\lambda+1}, a_\lambda, \lambda, k, a, b)$

$$\begin{cases} 2a_0 k(2k-1) = 0 \\ 2a_1(k+1)(2k+1) - (4k^2-a+16b)a_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ k = 0, 1/2 \right.$$

($\underline{k=0}$, $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$; $\underline{k=1/2}$, $a_0 \neq 0$, $a_1 = 0$) Obtemos assim duas soluções particulares, (cada uma dependendo de uma const.te arbitrária). A sol. geral será então uma combinação linear das duas. (EXERCÍCIO ?)

A forma explícita do termo geral da série é bastante complicada e não insistiremos nesta via, até porque a solução que mais interessa da equação de Mathieu não é a solução geral mas sim certas soluções particulares periódicas as quais aliás só se obtêm para certas relações entre as constantes a e b. Em vez de as estudarmos, preferimos tratar de um caso mais geral: o das soluções periódicas das eq. dif. lineares de 2ª ordem com coef. periódicos (a respeito das quais se tem o Teorema de Floquet (cf. § seguinte)).

§9. Teorema de Floquet

(cf. Ince - muito desenvolvido)

No que se segue vamos deduzir um importante resultado acerca das equações diferenciais lineares de 2ª ordem,

(1) $$f(x)\frac{d^2u}{dx^2} + g(x)\frac{du}{dx} + h(x)u = 0,$$

com coeficientes periódicos de período l. ($f(x+l)=f(x)$, $g(x+l)=g(x)$, $h(x+l)=h(x)$).
Como se trata de uma equação dif. de 2ª ordem, linear, ela admite necessàriamente duas soluções particulares, linearmente independentes, $y_1(x)$ e $y_2(x)$, cuja combinação linear dá a solução geral ou seja, $\forall\, y$, solução de (1), pode escrever-se sob a forma

(2) $$y(x) = A_1 y_1(x) + A_2 y_2(x),$$

em que A_1 e A_2 são certas constantes. Como os coeficientes $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$ são periódicos segue-se que a substituição de x por $x+l$ na equação (1) a deixa inalterada. Quer isto dizer que se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções de (1) $y_1(x+l)$ e $y_2(x+l)$ também o são (*), tendo em conta (2), podemos portanto escrevê-las como combinações lineares de $y_1(x)$ e $y_2(x)$ com certas constantes:

$$y_1(x+l) = \alpha_{11}y_1(x) + \alpha_{12}y_2(x)$$
$$y_2(x+l) = \alpha_{21}y_1(x) + \alpha_{22}y_2(x)$$

Ora $\forall\, A_1$ e A_2, $y(x)$ dado por (2) é sempre uma solução de eq. (1). Em particular teremos ainda uma solução se obrigarmos A_1 e A_2 a obedecer às condições

$$A_1\alpha_{11} + A_2\alpha_{21} = kA_1$$
$$A_1\alpha_{12} + A_2\alpha_{22} = kA_2$$

em que k é uma constante.

(Aliás, k fica determinado, ou bivalente, pela própria imposição de existir solução para este sistema ou seja (Cramer) $\begin{vmatrix} \alpha_{11}-k & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-k \end{vmatrix} = 0$.)

(*) Consideremos a equação (1) e a que dela se obtém substituindo x por $x+l$:

(1') $$f(x+l)\frac{d^2u(x+l)}{d(x+l)^2} + g(x+l)\frac{du(x+l)}{d(x+l)} + h(x+l)u(x+l) = 0.$$

Como é evidente $\frac{d}{d(x+l)} = \frac{d}{dx}\frac{dx}{d(x+l)} = \frac{d}{dx}$ e portanto também $\frac{d^2}{d(x+l)^2} = \frac{d^2}{dx^2}$.
Além disto, pela periodicidade dos coeficientes, $f(x+l)=f(x)$, $g(x+l)=g(x)$, $h(x+l)=h(x)$.
A equação (1') fica então $f(x)\frac{d^2u(x+l)}{dx^2} + g(x)\frac{du(x+l)}{dx} + h(x)u(x+l) = 0$

$\therefore$ se $u(x)$ é solução, $u(x+l)$ também o é.

Mas $e^{\mu x}P(x)$ e $e^{-\mu x}P(-x)$ são funções independentes (não são proporcionais). ∴ a solução geral de (1) ~~[illegible]~~ (em que os coeficientes f, g e h obedecem às H≡s indicadas) é uma combinação linear de $y(x)$ e de $y(-x)$, ou seja, é

$$\boxed{y(x) = c_1 e^{\mu x} P(x) + c_2 e^{-\mu x} P(-x)}.$$

1. Mostre que para grandes valores de n, as soluções $u_n(x)$ e $v_n(x)$ das equações

$$u_n'' - f(x)\,u_n + \lambda_n u_n = 0$$

$$v_n'' + \lambda_n' v_n = 0$$

coincidem. $f(x)$ é uma função limitada no intervalo de existência de x.

2. Mostre que as transformações de variáveis

variável dependente: $u(x) \longrightarrow z(x) = (pw)^{1/4}\,u$

" independente: $x \longrightarrow t = \int_a^x \left(\frac{w}{p}\right)^{1/2} dx$

permitem ~~...~~ levar à equação de Sturm-Liouville,

$$p u'' + p' u' + (\lambda w - q)\,u = 0 \qquad (x \in (a,b))$$

à forma

$$\ddot{z} - f(t)\,z + \lambda z = 0$$

onde $f(t) = \frac{q}{w} + \frac{\ddot{F}}{F}$ sendo $F = (wp)^{1/4}$

($\dot{f}$ designa uma derivada em ordem a t ; f' designa uma derivada em ordem a x)

Muitos cálculos! Mas é útil. (e não tão difícil)

3. Mostre que, no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$ (intervalo aberto. extremos não incluídos) a solução da equação diferencial

$$\cos x\, y'' - 2\sin x\, y' + \frac{1}{\cos^3 x}\, y = 0$$

é oscilatória.

Sugestão: utilize o processo contido para levar a equação à forma

$$v'' = f(x)\,v .$$

→ Aplique o método de integração por séries à resolução da equação diferencial

$$y'' + y = 0$$

R: 1) $k=0$, $a_0 \forall$, $a_1 \forall$ $\quad y = a_0 \cos x + a_1 \sin x = \frac{a_0}{a_1} y_1 + \frac{a_1}{a_0} y_2$

2) $k=1$, $a_0 \forall$, $a_1 = 0$ $\quad y = a_0 \sin x = y_2$

3) $k=-1$, $a_1 \forall$, $a_0 = 0$ $\quad y = a_1 \cos x = y_1$

→ Aplique o método de integração por séries às equações diferenciais

a) $y'' + y/x^3 = 0$

b) $y'' + y'/x^2$

e verifique que, tal como prevê o Teorema de Fuchs, se não conduz à obtenção de soluções significativas

R: a) só se obtém a solução nula

b) obtém-se uma solução nula e uma solução dada por uma série divergente!

→ Aplique o método de integração por séries à eq. dif.

$$y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$$

e verifique, de acordo c/o Teorema de Fuchs, que apesar das singularidades x=0, se conduz à obtenção de soluções.

R: $a_0 = 0, k \forall$ → solução nula

$a_0 \forall, k = 1$ → $y = a_0 x$ (solução particular)

$a_0 \forall, k = -1$ → $y = x^{-1}(a_0 + a_2 x^2)$ (é a solução geral — 2 const. arbitrárias: a_0 e a_2. Contém a precedente como caso particular de $a_0 = 0$)

Considere as quatro soluções y_1, y_2 ($|x|<1$) y_3 e y_4 ($|x|>1$) obtidas para a equação de Legendre (cf. sua forma explícita págs 26, 27 e 32)

Demonstre que:

a) quando l é um nº inteiro par e positivo, $y_1 \equiv y_3$

b) " " " " " " ímpar positivo, $y_2 \equiv y_3$

c) " " " " " " par negativo, $y_2 \equiv y_4$

d) " " " " " " ímpar negativo, $y_1 \equiv y_4$

(As igualdades são entendidas, naturalmente, a menos de constante multiplicativa. Determine essas constantes). De notar que em todos estes casos as séries $y_1 y_2 y_3$ e y_4 se reduzem a polinómios ∴ com valores finitos $\forall x \in (-\infty, +\infty)$.

Verifique que a série y_4 é a série y_3 com l substituído por $-(l+1)$

~~[illegible]~~,

~~$[illegible] \equiv y_4$~~.

1. $\ddot{u}_n - f u_n + \lambda_n u_n = 0$

$\ddot{v}_n + \lambda'_n v_n = 0$

Como f é limitado temos, com $M \equiv \max |f|_{(a,b)}$:

$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n - f) < \lim (\lambda_n + M) = \lim \lambda_n \left(1 + \frac{M}{\lambda_n}\right)$

Ora como se sabe $\lambda_n \xrightarrow[n\to\infty]{} k n^2$ donde

$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n - f) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n$. Em consequência, para grandes valores de n,

$\lambda_n - f \cong \lambda_n$ e a 1ª equação fica $\ddot{u}_n + \lambda_n u_n = 0$ ou seja, = à 2ª $\therefore$ para grandes valores de n, as soluções são =s. q.d.

$$\longrightarrow \quad \cos x \cdot y'' - 2\sin x\, y' + \frac{1}{\cos^3 x}\, y = 0 \qquad (-\pi/2, \pi/2)$$

$$\therefore \quad y'' - 2\,\mathrm{tg}\,x\, y' + \frac{1}{\cos^4 x}\, y = 0$$

$$\therefore \quad y'' + X_1 y' + X_2 y = 0 \qquad \text{com} \quad X_1 = -2\,\mathrm{tg}\,x$$

$$X_2 = \frac{1}{\cos^4 x} \qquad \text{em } (-\pi/2, \pi/2)$$

Ora como se sabe, a transformação (p. 22 Parte III do curso)

$$y(x) \longrightarrow v(x): \; y = v\, e^{-\frac{1}{2}\int X_1} = v\, e^{-\frac{1}{2}\int(-2\,\mathrm{tg}\,x)} = v\, e^{\int \mathrm{tg}\,x}$$

$$= v\, e^{-\log \cos x} = \frac{v}{\cos x} = v \sec x$$

permite levar a eq. à forma equivalente

$$v'' + v\left(X_2 - \tfrac{1}{2}X_1' - \tfrac{1}{4}X_1^{2}\right) = 0. \quad \text{ou seja}$$

$$v'' + v\left(\cancel{\sec^4 x} - \tfrac{1}{2}(-2\sec^2 x) - \tfrac{1}{4}(\cancel{4\sec^2 x})\right) = 0$$

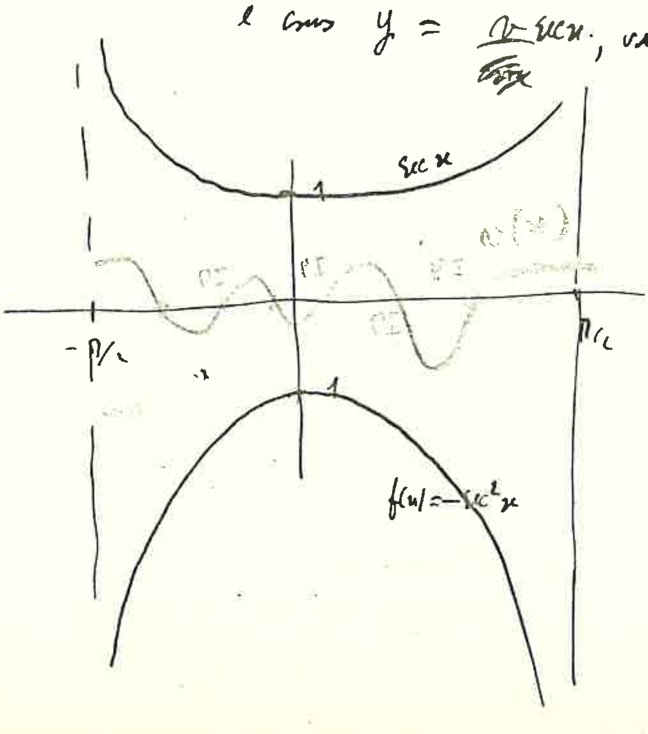
$$\therefore \quad v'' + v\sec^2 x = 0 \qquad \text{que é da forma} \quad v'' = f(x)\, v$$

$$\text{com } f(x) = -\sec^2 x < 0 \text{ e finita em } (-\pi/2, \pi/2)$$

$\therefore$ cf. p. 23 segue-se que $v(x)$ é oscilatória em $(-\pi/2, \pi/2)$

e como $y = \frac{v}{\cancel{\cos x}} \sec x$, vem que $Y(x)$ tb é oscilatória em $(-\pi/2, \pi/2)$

(cf figura) c.q.d.



$$\boxed{y''+y=0} \qquad y=\sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda} \qquad y'=\sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda)x^{k+\lambda-1} \qquad y''=\sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2}$$

$$\therefore \sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1)x^{k+\lambda-2}+\sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda}=0$$

$$\therefore a_0k(k-1)x^{k-2}+a_1k(k+1)x^{k-1}+\sum_{\lambda=2}^\infty a_\lambda(\lambda+k)(\lambda+k-1)x^{k+\lambda-2}+\sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda}=0$$

$$\cdots\cdots+\sum_{\mu=0}^\infty a_{\mu+2}(\mu+2+k)(\mu+k+1)x^{k+\mu}+\cdots\cdots$$

$$\therefore a_0k(k-1)x^{k-2}+a_1k(k+1)x^{k-1}+\sum_0^\infty\left[a_\lambda+a_{\lambda+2}(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)\right]x^{k+\lambda}=0$$

$$\begin{cases} a_0k(k-1)=0 \\ a_1k(k+1)=0 \\ a_{\lambda+2}=-\dfrac{a_\lambda}{(\lambda+k+2)(\lambda+k+1)} \qquad \lambda=0,1,2,\dots \end{cases}$$

$\therefore$ 1) $\left|\begin{array}{l} k=0 \\ a_0\forall,\ a_1\forall \end{array}\right.$ 2) $\left|\begin{array}{l} k=1 \\ a_0\forall \\ a_1=0 \end{array}\right.$ 3) $\left|\begin{array}{l} k=-1 \\ a_1\forall,\ a_0=0 \end{array}\right.$

---

(1) $\left\{\begin{array}{l} k=0 \\ a_0\forall,\ a_1\forall \end{array}\right.$ $\qquad a_{\lambda+2}=-\dfrac{a_\lambda}{(\lambda+2)(\lambda+1)}$

$$y=\sum_0^\infty a_\lambda x^\lambda=a_0+a_1x-\underbrace{\frac{a_0}{2\cdot1}}_{a_2}x^2-\underbrace{\frac{a_1}{3\cdot2}}_{a_3}x^3+\underbrace{\frac{a_0}{2\cdot1}\cdot\frac{1}{4\cdot3}}_{a_4}x^4+\underbrace{\frac{a_1}{3\cdot2}\frac{1}{5\cdot4}}_{a_5}x^5+\cdots$$

$$=a_0\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots\right]+a_1\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right]$$

$$=a_0\cos x+a_1\sin x \quad =y_1+y_2$$ (solução geral)

(com a continuação)

---

(2) $\{k=1,\ a_0\forall,\ a_1=0$

$$a_{\lambda+2}=-\frac{a_\lambda}{(\lambda+3)(\lambda+2)} \qquad \lambda=0,1,2\dots$$

$$y=\sum a_\lambda x^{\lambda+1}=a_0x+\cancel{a_1x^2}+a_2x^3+\cancel{a_3x^4}+\cdots=a_0x+a_2x^3+a_4x^5+a_6x^7+\cdots$$

$$=a_0x-\frac{a_0}{3\cdot2}x^3-\frac{a_2}{5\cdot4}x^5+\cdots=a_0x-\frac{a_0}{3!}x^3+\frac{a_0}{5!}x^5+\cdots$$

$$=a_0\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots\right]=a_0\sin x = y_2$$ (solução particular)

(3) $\{ k=-1,\ a_0 = 0\quad a_1 \neq$

$$a_{\lambda+2} = -\frac{a_\lambda}{\lambda(\lambda+1)} \qquad \lambda = 0,1,2,\dots$$

$$y = \sum_0^\infty a_\lambda x^{\lambda-1} = \cancel{\frac{a_0}{x}} + a_1 + \cancel{a_2}x + a_3x^2 + \cancel{a_4}x^3 + a_5x^4 + \cdots$$

$$= a_1 - \frac{a_1}{2}x^2 - \frac{a_3}{4.3}x^4 - \frac{a_5}{65}x^6 + \cdots$$

$$= a_1 - \frac{a_1}{2!}x^2 + \frac{a_1 x^4}{4!} - \frac{a_1}{6!}x^6 + \cdots$$

$$= a_1\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right] = a_1 \cos x = y_1$$

— [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible]

$$e^x = \sum_0^\infty \frac{x^m}{m!}$$?

$$\log(1+x) = \sum(-)\frac{x^m}{m!}$$

$$\boxed{y'' + \frac{y}{x^3} = 0}$$

$$y = \sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda}$$

$$y' = \sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda) x^{k+\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_0 a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2}$$

Substituindo,

$$\sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda-3} = 0$$

$$\therefore \sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + a_0 x^{k-3} + \underbrace{\sum_{\lambda=1}^\infty a_\lambda x^{k+\lambda-3}}_{(\lambda=\mu+1)\quad = \sum_{\mu=0}^\infty a_{\mu+1} x^{k+\mu-2} = \sum_{\lambda=0}^\infty a_{\lambda+1} x^{k+\lambda-2}} = 0$$

$$\therefore \sum_0^\infty \left[a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) - a_{\lambda+1} \right] x^{k+\lambda-2} + a_0 x^{k-3} = 0$$

$$\therefore \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_{\lambda+1} = a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) \end{cases} \quad \lambda = 0,1,2,\dots \quad \Rightarrow \begin{cases} \text{ou } k = \infty \\ \text{ou } a_1 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \end{cases}$$

$\therefore$ não se obtêm soluções significativas

$$\boxed{y'' + \frac{y'}{x^2} = 0} \qquad y = \sum a_\lambda x^{k+\lambda} \qquad y' = \cdots \qquad y'' = \cdots$$

$$\sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda) x^{k+\lambda-3} = 0$$

$$\therefore \sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + a_0 k x^{k-3} + \underbrace{\sum_{\lambda=1}^\infty a_\lambda (k+\lambda) x^{k+\lambda-3}}_{(\lambda=\mu+1)\quad = \sum_{\mu=0}^\infty a_{\mu+1}(k+\mu+1) x^{k+\lambda-2}}$$

$$\therefore a_0 k x^{k-3} + \sum_0^\infty \left[a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) + a_{\lambda+1}(k+\lambda+1) \right] x^{k+\lambda-2} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_0 k = 0 \\ a_{\lambda+1} = -\dfrac{(k+\lambda)(k+\lambda-1)}{(k+\lambda+1)} a_\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \Rightarrow a_n = 0 \ \forall n \ \therefore \text{não dá soluções significativas} \\ \text{ou} \\ k = 0 \Rightarrow a_{\lambda+1} = -\dfrac{\lambda(\lambda-1)}{\lambda+1} a_\lambda \end{cases}$$

Mas a série assim obtida não é convergente; com efeito

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \, x^{k+n-1}}{a_n \, x^{k+n-2}} \right| = \lim \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| x = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)}{n+1} x =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n x \quad \therefore \text{diverge}.$$

$$\boxed{y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0}$$

$$y = \sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda}, \quad y' = \dots, \quad y'' = \dots$$

$$\sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda)(k+\lambda-1) x^{k+\lambda-2} + \sum_0^\infty a_\lambda (k+\lambda) x^{k+\lambda-2} - \sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda-2} = 0$$

$$\therefore \sum_0^\infty a_\lambda [\underbrace{(k+\lambda)(k+\lambda-1) + (k+\lambda) - 1}_{=(k+\lambda-1)(k+\lambda+1)}] x^{k+\lambda-2} = 0$$

$$\therefore a_0 (k-1)(k+1) + \sum_1^\infty a_\lambda \dots = 0$$

$$\therefore \begin{cases} a_0(k-1)(k+1) = 0 \\ a_\lambda (k+\lambda+1)(k+\lambda-1) = 0 \quad \lambda = 1,2,\dots \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a_0 = 0, \ k \ \forall \\ k = \pm 1, \ a_0 \ \forall \end{cases}$$

$\underline{a_0 = 0, \ k \ \forall} \Rightarrow a_\lambda (k+\lambda+1)(k+\lambda-1) = 0 \ (\lambda = 1,2,\dots)$ e como k é $\forall$ $\Rightarrow a_\lambda = 0$, $\lambda = 1,2,\dots$ ∴ a solução nula

$\underline{k = 1, \ a_0 \ \forall \neq 0} \Rightarrow a_\lambda (\lambda+2)\cdot\lambda = 0 \ (\lambda = 1,2,\dots) \Rightarrow a_\lambda = 0$, $\lambda = 1,2,\dots$

∴ a solução é $\begin{cases} a_0 \neq 0 \\ a_\lambda = 0 \ \lambda = 1,2,\dots \\ k = 1 \end{cases} \Rightarrow y = \sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda} = \underline{\underline{a_0 x}}$

$\underline{k = -1, \ a_0 \ \forall \neq 0} \Rightarrow a_\lambda (\lambda-2)\lambda = 0 \ (\lambda = 1,2,\dots) \Rightarrow \begin{cases} a_0, a_2 \neq 0 \\ a_\lambda = 0 \\ \lambda \neq 0,2 \end{cases}$

∴ a solução é $\begin{cases} a_0, a_2 \neq 0 \\ a_\lambda = 0 \ \lambda \neq 0,2 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow y = \sum_0^\infty a_\lambda x^{k+\lambda} = \underline{\underline{x^{-1}(a_0 + a_2 x^2)}}$

Como tem duas constantes arbitrárias, a_0 e a_2, trata-se portanto da solução geral (que, aliás, contém a precedente como caso particular c/ $a_0 = 0$)

TE

A série y_4, com a substituição de l por $-(l+1)$, coincide com y_3

Termo geral de y_4 é

$$b_0 \frac{\overbrace{(l+2\lambda)(l+2\lambda-1)\cdots(l+2)(l+1)}^{2\lambda\ \text{factores}}}{2\lambda\cdot(2\lambda-2)\cdots 4\cdot 2\cdot \underbrace{(2l+2\lambda+1)(2l+2\lambda-1)\cdots(2l+5)(2l+3)}_{\lambda\ \text{factores}}} \cdot x^{-2\lambda-l-1}$$

substituindo l por $-(l+1)$ vem então,

$$b_0 \frac{(-l-1+2\lambda)(-l-1+2\lambda-1)\cdots(-l-1+2)(-l-1+1)}{(2\lambda)(2\lambda-2)\cdots 4\cdot 2\cdot(-2l-2+2\lambda+1)(-2l-2+2\lambda-1)\cdots(-2l-2+5)(-2l-2+3)} x^{-2\lambda+l+1-1} =$$

$$= b_0 \frac{\overbrace{(-l+2\lambda-1)(-l+2\lambda-2)\cdots(-l+1)(-l)}^{2\lambda\ \text{factores}}}{2\lambda\cdots 2\cdot \underbrace{(-2l+2\lambda-1)(-2l+2\lambda-3)\cdots(-2l+3)(-2l+1)}_{\lambda\ \text{factores}}} x^{-2\lambda+l} =$$

$$= b_0 \frac{(-1)^{2\lambda}}{(-1)^{\lambda}} \frac{l(l-1)\cdots(l-2\lambda+2)(l-2\lambda+1)}{2\lambda\cdots 2\cdot(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2\lambda+3)(2l-2\lambda+1)} x^{-2\lambda+l},$$

que é, com $b_0 \sim a_0$, o termo geral de y_3

c.q.d.

Quando l é um nº inteiro par e positivo, y_1 e y_3 ~~…~~ reduzem-se a polinómios e é $y_1 = y_3$ (a menos de constante multiplicativa)

O termo geral de y_1 é

$$a_0 (-1)^\lambda \frac{(l+2\lambda-1)(l+2\lambda-3)\cdots(l+1)\cdot l(l-2)\cdots(l-2\lambda+2)}{(2\lambda)!} x^{2\lambda}$$

Como l é >0 int. e par, há-de haver um valor de λ tal que $l-2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda = \frac{l}{2}$
Para este valor de λ (e seguintes), os coeficientes são nulos $\therefore$ a série reduz-se a um polinómio cujo último termo (não nulo) é o que corresponde a $\begin{cases}\lambda = \frac{l}{2}+1-1 = \frac{l}{2}.\\ \therefore 2\lambda = l\end{cases}$ y_1 fica então

$$y_1 = a_1 - a_1\frac{(l+1)l}{2!}x^2 + a_1\frac{(l+3)(l+1)l(l-2)}{4!}x^4 + \cdots + a_1(-1)^{l/2}\frac{(l+l-1)(l+l-3)\cdots(l+1)\cdot l(l-2)\cdots(l-l+2)}{l!}x^l.$$

$$\therefore y_1 = a_1 - \frac{a_1(l+1)l}{2!}x^2 + \cdots + a_1(-1)^{l/2}\frac{(2l-1)(2l-3)\cdots(l+1)\cdot l(l-2)\cdots 4\cdot 2}{l!}x^l$$

Quanto ao termo geral de y_3 ele é

$$b_0(-1)^\lambda \frac{l(l-1)(l-2)\cdots(l-2\lambda+2)(l-2\lambda+1)}{2\lambda\cdots 2\cdot(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2\lambda+1)} x^{-2\lambda+l}$$

Como l é >0, int. e par, há-de haver um valor de λ tal que $l-2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda = \frac{l}{2}+1.$
O último termo não nulo do polinómio é então o que corresponde a $\begin{cases}\lambda = \frac{l}{2}.\\ 2\lambda = l\end{cases}$ y_3 vem então

$$y_3 = b_0x^l - b_0\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + b_0\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{4\cdot 2(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} + \cdots + b_0(-1)^{l/2}\frac{l(l-1)(l-2)\cdots(l-l+2)(l-l+1)}{l(l-2)\cdots 2\cdot(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-l+1)}\cancel{x^{-l+l}}$$

$$\therefore y_3 = b_0x^l - b_0\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + b_0\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{4\cdot 2\cdot(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} + \cdots + b_0(-1)^{l/2}\frac{\overbrace{l(l-1)(l-2)\cdots 2\cdot 1}^{l!}}{l(l-2)\cdots 2\cdot(2l-1)(2l-3)\cdots(l+1)}.$$

Ora y_3, multiplicado por $\frac{a_1}{b_0}\frac{l(l-2)\cdots 2\cdot(2l-1)(2l-3)\cdots(l+1)}{l!}$, coincide com y_1

c.q.d.

Quando l é um nº inteiro, ímpar e positivo, y_2 e y_3 reduzem-se a polinómios e é $y_2 = y_3$ (a menos de const. multipl.)

Termo geral de y_2:

$$a_0(-1)^\lambda \frac{(l+2\lambda)(l+2\lambda-2)\cdots(l+4)(l+2)\cdot(l-1)(l-3)\cdots(l-2\lambda+3)(l-2\lambda+1)}{(2\lambda+1)!}\, x^{2\lambda+1}$$

Façamos $l-2\lambda+1=0 \longrightarrow \lambda=\frac{l+1}{2}$. Como l é >0 ímpar, segue-se que para $\lambda \geq \frac{l+1}{2}$ todos os termos têm coef. nulo $\therefore$ temos um polinómio. O último termo não nulo corresponde a $\lambda = \frac{l+1}{2}-1 = \frac{l-1}{2}$ $(\therefore 2\lambda = l-1)$. y_2 reduz-se então a

$$y_2 = a_0x - a_0\frac{(l+2)(l-1)}{3!}x^3 + a_0\frac{(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)}{5!}x^5 + \cdots + a_0(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{(l+l-1)(l+l-1-2)\cdots(l+2)\cdot(l-1)\cdots(l-l+1+3)(l-l+1+1)}{(l-1+1)!}x^l$$

$$\therefore\ y_2 = a_0x - a_0\frac{(l+2)(l-1)}{3!}x^3 + a_0\frac{(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)}{5!}x^5 + \cdots + a_0(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{(2l-1)(2l-3)\cdots(l+2)\cdot(l-1)(l-3)\cdots4\cdot2}{l!}x^l.$$

Quanto ao termo geral de y_3:

$$b_0(-1)^\lambda \frac{l(l-1)\cdots(l-2\lambda+2)(l-2\lambda+1)}{2\lambda(2\lambda-2)\cdots2\cdot(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-2\lambda+3)(2l-2\lambda+1)}\, x^{-2\lambda+l}$$

l é >0 ímpar $\therefore$ há-de haver um λ tal que $l-2\lambda+1=0 \longrightarrow \lambda=\frac{l+1}{2}$. Para este λ e seguintes, os coefic. são todos nulos $\therefore$ temos um polinómio cujo último termo $\neq 0$ é o que corresponde a $\lambda = \frac{l-1}{2}$ $(\therefore 2\lambda = l-1)$ ou seja

$$y_3 = b_0x^l - b_0\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + b_0\frac{l(l-1)(l-1)(l-3)}{4\cdot2\cdot(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} - \cdots + b_0(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{l(l-1)\cdots(l-l+1+2)(l-l+1+1)}{(l-1)(l-1-2)\cdots2\cdot(2l-1)(2l-3)\cdots(2l-l+1+3)(2l-l+1+1)}x^{-l+1+l}.$$

$$\therefore\ y_3 = b_0x^l - b_0\frac{l(l-1)}{2(2l-1)}x^{l-2} + b_0\frac{l(l-1)(l-2)(l-3)}{4\cdot2\cdot(2l-1)(2l-3)}x^{l-4} - \cdots + b_0(-1)^{\frac{l-1}{2}}\frac{\overbrace{l(l-1)\cdots3\cdot1}^{l!}}{(l-1)(l-3)\cdots4\cdot2\cdot(2l-1)(2l-3)\cdots(l+4)(l+2)}x.$$

Ora, como se vê, y_3 multiplicado pela constante $\frac{a_0}{b_0}\,\frac{(l-1)(l-3)\cdots4\cdot2\cdot(2l-1)(2l-3)\cdots(l+4)(l+2)}{l!}$, coincide com y_2 cqd

Quando l é um número inteiro negativo par, y_2 e y_4 reduzem-se a polinómios e, a menos de constante multiplicativa, temos $y_2 \equiv y_4$.

Como a expressão do termo geral de y_2 é

$$(-1)^\lambda \cdot a_0 (-1)^\lambda \frac{(l+2\lambda)(l+2\lambda-2)\cdots(l+2)\cdot(l-1)(l-3)\cdots(l-2\lambda+3)(l-2\lambda+1)}{(2\lambda+1)!} x^{2\lambda+1},$$

como l é negativo, inteiro e par, espera-se que haverá um valor de λ: $l+2\lambda=0 \Rightarrow$
$\rightarrow \lambda = -l/2$. Para λ igual a este valor e superiores, os coeficientes vêm iguais a zero $\therefore$ Temos um polinómio cujo último termo não nulo corresponde a
$\lambda = -l/2 - 1$. (l é negativo e par!) Donde

$\lambda = -\frac{l+2}{2}$
$2\lambda = -l-2$

$$y_2 = a_0 x - a_0 \frac{(l+2)(l-1)}{3!} x^3 + a_0 \frac{(l+4)(l+2)(l-1)(l-3)}{5!} x^5 + \cdots + a_0 \frac{(-l+l+2)(-l+l+2+2)\cdots(-l-4)(-l-2)\cdot(l-1)(l-3)\cdots(l+l+2+3)(l+l+2+1)}{(-l-2+1)!} x^{-l-2+1}$$

$$y_2 = a_0 x + a_0 \frac{(-l-2)(l-1)}{3!} x^3 + a_0 \frac{(-l-4)(-l-2)(l-1)(l-3)}{5!} x^5 + \cdots + a_0 \frac{(-l-2)(-l-4)\cdots 4\cdot 2\cdot(l-1)(l-3)\cdots(2l+5)(2l+3)}{(-l-1)!} x^{-l-1}$$

Quanto a y_4 o seu termo geral é

$$b_0 \frac{\overbrace{(l+2\lambda)(l+2\lambda-1)\cdots(l+2)(l+1)}^{2\lambda \text{ factores}}}{2\lambda\cdot(2\lambda-2)\cdots 4\cdot 2\cdot(2l+2\lambda+1)\cdots(2l+5)(2l+3)} x^{-2\lambda-l-1}$$

Como l é <0, int. e par, espera-se que haverá um λ tal que $l+2\lambda=0 \rightarrow \lambda=-l/2$. Todos os termos são portanto nulos para $\lambda \geq -l/2$. Temos então um polinómio cujo último termo $\neq 0$ corresponde a $\lambda = -\frac{l}{2}-1 = \begin{cases} -\frac{l+2}{2} = \lambda \\ -l-2 = 2\lambda \end{cases} \therefore$

$$y_4 = b_0 x^{-l-1} + b_0 \frac{(l+2)(l+1)}{2(2l+3)} x^{-l-3} + b_0 \frac{(l+4)(l+3)(l+2)(l+1)}{4\cdot 2\cdot(2l+5)(2l+3)} x^{-l-5} + \cdots + b_0 \frac{(l-l-2)(l-l-2-1)\cdots(l+2)(l+1)}{(-l-2)(-l-4)\cdots 4\cdot 2(2l-l-2+1)\cdots(2l+5)(2l+3)} x^{l+2-l-1}$$

mas há 2λ factores $\therefore$

$$= (-1)^{2\lambda}(-l-1)(-l-2)\cdots 3\cdot 2 = (-l-1)!$$

$$y_4 = b_0 x^{-l-1} + b_0 \frac{(-l-2)(-l-1)}{2(2l+3)} x^{-l-3} + \cdots + b_0 \frac{(-l-1)!}{(-l-2)(-l-4)\cdots 2\cdot(l-1)\cdots(2l+5)(2l+3)} x.$$

E é evidente que y_4, multiplicado por $\frac{a_0}{b_0}\frac{(-l-2)(-l-4)\cdots 2\cdot(l-1)\cdots(2l+3)}{(-l-1)!}$,

coincide com y_2 cqd

Quando l é um nº inteiro negativo ímpar, y_1 e y_4 reduzem-se a polinómios e tem-se $y_1 \equiv y_4$ (a menos de constante multiplicativa)

Termo geral de y_1:

$$a_1(-1)^{\lambda}\frac{\overbrace{(l+2\lambda-1)(l+2\lambda-3)\cdots(l+3)(l+1)\cdot l(l-2)\cdots(l-2\lambda+2)}^{2\lambda\text{ factores}}}{(2\lambda)!}x^{2\lambda}.$$

Como l é negativo e ímpar espera-se que haverá um λ tal que $l+2\lambda-1=0 \to \lambda=\frac{1-l}{2}$.
Para $\lambda \geq \frac{1-l}{2}$ os coeficientes vêm então todos nulos. Temos então um polinómio cujo último termo não nulo corresponde a $\lambda=\frac{1-l}{2}-1=-\frac{l+1}{2}$ $\therefore \begin{cases}\lambda=-\frac{l+1}{2}\\ 2\lambda=-l-1\end{cases}$. Donde

$$y_1 = a_1 - a_1\frac{(l+1)l}{2!}x^2 + a_1\frac{(l+3)(l+1)l(l-2)}{4!}x^4 + \cdots\cdots + a_1(-1)^{-\frac{l+1}{2}}\frac{(l-l-1-1)(l-l-1-3)\cdots(l+3)(l+1)\cdot l(l-2)\cdots(l+l+1+2)}{(-l-1)!}x^{-l-1}$$

$$\therefore y_1 = a_1 - a_1\frac{(l+1)l}{2!}x^2 + a_1\frac{(l+3)(l+1)l(l-2)}{4!}x^4 + \cdots\cdots + a_1\frac{(-1)^{-\frac{l+1}{2}}(l+1)(l+3)\cdots(-4)(-2)\cdot l(l-2)\cdots(2l+3)}{(-l-1)!}x^{-l-1}$$

este producto tem $\lambda=-\frac{l+1}{2}$ factores $\therefore$

$$= (-1)^{-\frac{l+1}{2}}\cdot(-1)^{-\frac{l+1}{2}}\cdot(-l-1)(-l-3)\cdots(4)(2) =$$
$$= (-l-1)(-l-3)\cdots 4.2.$$

Quanto ao termo geral de y_4:

$$b_0\frac{\overbrace{(l+2\lambda)(l+2\lambda-1)\cdots(l+2)(l+1)}^{2\lambda\text{ factores}}}{2\lambda(2\lambda-2)\cdots 2\cdot(2l+2\lambda+1)\cdots(2l+5)(2l+3)}x^{-2\lambda-l-1}$$

l é negativo e ímpar $\therefore \exists\lambda: l+2\lambda-1=0 \therefore \lambda=\frac{1-l}{2}$. Para este valor de λ e seguintes todos os coef. são nulos $\therefore$ Temos um polinómio cujo último termo $\neq 0$ é o que corresponde a $\lambda=\frac{1-l}{2}-1 \therefore \begin{cases}\lambda=-\frac{l+1}{2}\\ 2\lambda=-l-1\end{cases}$. Donde

$$y_4 = b_0x^{-l-1} + b_0\frac{(l+2)(l+1)}{2(2l+3)}x^{-l-3} + \cdots\cdots + b_0\frac{(l-l-1)(l-l-1-1)\cdots(l+2)(l+1)}{(-l-1)(-l-1-2)\cdots 2\cdot(2l-l-1+1)\cdots(2l+5)(2l+3)}x^{+l+1-l-1}.$$

$$\therefore y_4 = b_0x^{-l-1} + b_0\frac{(l+2)(l+1)}{2(2l+3)}x^{-l-3} + \cdots\cdots + b_0\frac{(l+1)(l+2)\cdots(-3)(-2)(-1)}{(-l-1)(-l-3)\cdots 4.2\cdot l(l-2)\cdots(2l+5)(2l+3)}.$$

este producto tem 2λ factores $\therefore$ é $=(-1)^{2\lambda}(-l-1)(-l-2)\cdots(3)(2)(1) = (-l-1)!$

Como se vê, y_4 multiplicado por $\frac{(-l-1)(-l-3)\cdots 4.2\cdot l(l-2)\cdots(2l+5)(2l+3)}{(-l-1)!}$, é igual a y_1 c.q.d.

→ De uma maneira análoga ao que se faz com as singularidades em pontos $x=x_0$ de abcissa finita, diz-se que a eq. dif.

$$y''+X_1(x)y'+X_2(x)y=0$$

tem uma <u>singularidade no ∞</u> se as funções X_1 ou X_2 tomarem valores ∞s no infinito (ou, + precisamente, se tenderem para ∞ quando $x\to\infty$)

Mostre, utilizando o Teor. de Fuchs e a Transformação de variáveis

$$x \to t = 1/x$$

que as <u>singularidades no ∞</u> são

a) <u>essenciais</u> se xX_1 e x^2X_2 tenderem para ∞ quando $x\to\infty$

b) <u>não essenciais</u> se xX_1 e x^2X_2 tenderem para valores finitos quando $x\to\infty$.

Teorema de Fuchs e singularidades no caso (i.e. em $x=\infty$)

$$y'' + X_1(x)\,y' + X_2(x)\,y = 0$$

$$x \longrightarrow t = 1/x = x^{-1}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{dt}\frac{dt}{dx} = -x^{-2}\frac{d}{dt} = -t^2\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(-x^{-2}\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dx}(-x^{-2})\frac{d}{dt} + (-x^{-2})\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt}\right) =$$

$$= 2x^{-3}\frac{d}{dt} - x^{-2}\frac{d^2}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx} = 2x^{-3}\frac{d}{dt} + x^{-4}\frac{d^2}{dt^2} = 2t^3\frac{d}{dt} + t^4\frac{d^2}{dt^2}$$

∴ a eq. fica

$$2t^3\frac{dy}{dt} + t^4\frac{d^2y}{dt^2} + X_1(t)\left[-t^2\frac{dy}{dt}\right] + X_2(t)\,y = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left[-\frac{X_1}{t^2} + \frac{2}{t}\right]\frac{dy}{dt} + \frac{X_2(t)}{t^4}\,y = 0$$ (eq. equivalente à inicial e que tem singularidades em $t=0$ se a inicial as tiver em $x=\infty$)

Ora, pelo Teor. de Fuchs as singularidades da eq.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + Y_1\frac{dy}{dt} + Y_2\,y = 0$$

são essenciais ($t_0 = 0$) se

$$(t\,Y_1)_{t=0} = \infty\ ,\quad (t^2\,Y_2)_{t=0} = \infty$$

i.e.: se $\left(2 - \frac{X_1}{t}\right)_{t=0} = \infty$, $\left(\frac{X_2}{t^2}\right)_{t=0} = \infty$

ou seja, se

$$(2 - x\,X_1)_{x=\infty} = \infty \qquad (x^2 X_2)_{x=\infty} = \infty$$ // sing. essenciais

e são não essenciais se

$$(2 - x\,X_1)_{x=\infty} = \text{finito} \qquad (x^2 X_2)_{x=\infty} = \text{finito}$$ // sing. não essenciais